



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería
Fascículo VII: Geometría analítica
Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería **Fascículo VII: Geometría analítica**

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Enero de 2022

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo

Índice general

1	Presentación	7
2	Representación en el plano cartesiano	9
2.1	Ejercicios resueltos	11
2.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	16
3	Ecuación de la recta	17
3.1	Ejercicios resueltos	21
3.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	26
4	Ecuación de la circunferencia	27
4.1	Ejercicios resueltos	29
4.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	34
5	Ecuación de la parábola	35
5.1	Ejercicios resueltos	39
5.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	43
6	Ecuación de la elipse	45
6.1	Ejercicios resueltos	46
6.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	51
7	Ecuación de la hipérbola	53
7.1	Ejercicios resueltos	54

7.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	59
	Bibliografía	61



1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

***Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo VII: Geometría analítica***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada

Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala



2. Representación en el plano cartesiano

El enfoque de la geometría analítica se basa en la utilización de un sistema coordenado que permite establecer una correspondencia uno a uno entre puntos y parejas ordenadas de números reales. Dicha correspondencia permite estudiar problemas geométricos aplicando procedimientos algebraicos.

El trabajo se centra en el desarrollo de habilidades para:

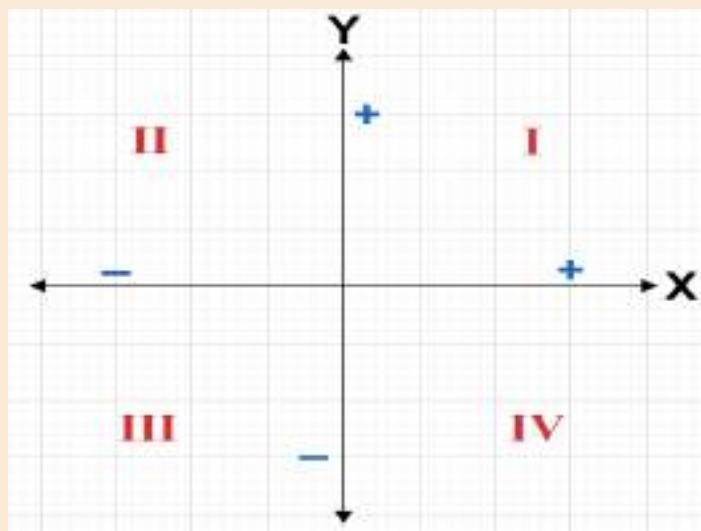
- a) Construir gráficas a partir de ecuaciones.
- b) Determinar ecuaciones a partir de figuras geométricas o de las condiciones que deben satisfacer.

Aunque no es el único, este estudio se limita a la utilización del sistema de coordenadas rectangulares, también conocido como de coordenadas cartesianas o plano cartesiano, en honor al matemático René Descartes.

Este sistema se conforma con dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se llama **origen**. Uno de los ejes es horizontal y se denota por X , el otro es vertical y se denota por Y . Se acepta que del origen hacia la derecha el eje X es positivo, mientras que del origen hacia la izquierda es negativo. De forma similar, se acepta que el eje Y es positivo del origen hacia arriba y negativo del origen hacia abajo.

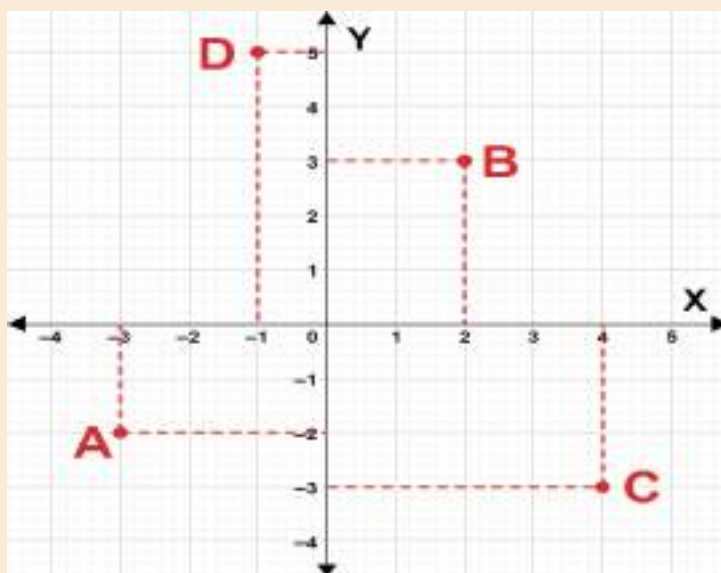
Si este convenio se cambia en alguna situación particular, debe indicarse.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones que se llaman cuadrantes y se enumeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, como se muestra en la figura.



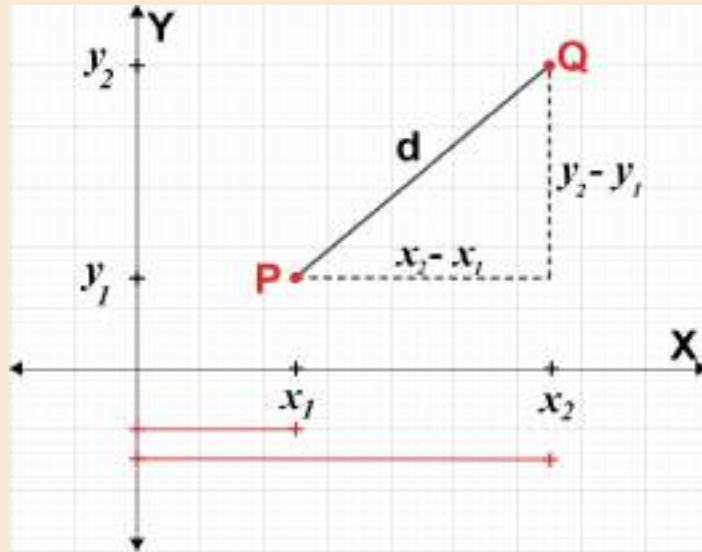
De esta forma, a un punto en el plano P le corresponde uno y solo un par ordenado de números reales que se denota por (x,y) , donde la primera componente se llama abscisa y se ubica en el eje X , mientras que la segunda componente se llama ordenada y se ubica en el eje Y .

Por ejemplo, se trazan los puntos $A(-3,-2)$, $B(2,3)$, $C(4,-3)$ y $D(-1,5)$, a partir de lo cual se identifica lo siguiente. El punto A se ubica tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo del origen, el punto B se encuentra dos unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba del origen. El punto C se ubica cuatro unidades hacia la derecha y tres unidades hacia abajo del origen, mientras que el punto D está a una unidad a la izquierda y cinco unidades hacia arriba del origen.



Distancia entre dos puntos del plano

Dados dos puntos del plano $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$, la distancia entre ellos se puede calcular por medio de la longitud del segmento de recta de P a Q .



En la figura se observa que la distancia d entre los puntos P y Q , coincide con la hipotenusa del triángulo formado, mientras que los catetos dados por las diferencias en las coordenadas de los puntos dados:

- Cateto horizontal: $x_2 - x_1$
- Cateto vertical: $y_2 - y_1$

Como se trata de un triángulo rectángulo, se cumple que:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Despejamos d y obtenemos que la distancia de P a Q está dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Un concepto de mucha utilidad es el punto medio de un segmento, ya que éste se encuentra a la misma distancia de los puntos ubicados en los extremos del segmento.

Las coordenadas del punto medio corresponden a los promedios aritméticos de las coordenadas de los puntos dados:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

.....

2.1 Ejercicios resueltos

1. Uno de los extremos de un segmento se ubica en $A(1, -2)$ y su punto medio es $P(4, 3)$. Determinar las coordenadas del otro extremo $B(x_2, y_2)$.

Solución:

Sabemos que las coordenadas del punto medio de un segmento cumplen con:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Sustituimos los valores conocidos y obtenemos

$$4 = \frac{1+x_2}{2}, \quad 3 = \frac{-2+y_2}{2}$$

Despejamos x_2 y y_2

$$8 = 1 + x_2 \quad 6 = -2 + y_2$$

$$7 = x_2 \quad 8 = y_2$$

Por lo que: $B(7, 8)$.

.....

2. Determinar la distancia del punto medio del segmento de recta con extremos en $A(-3, 5)$ y $B(2, -3)$, al punto medio del segmento con extremos en $C(3, 4)$ y $D(8, -1)$.

Solución:

Determinamos el punto medio del segmento AB y el punto medio del segmento con extremos en C y D , para $A(-3, 5)$ y $B(2, -3)$, tenemos

$$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

Para $C(3, 4)$ y $D(8, -1)$, el punto medio tiene coordenadas

$$x = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} \quad y = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Q\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Para calcular la distancia entre P y Q usamos la expresión

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{11}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2}$$

$$d = \sqrt{(6)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{1}{4}}$$

$$d \cong 6.02$$

3. Los puntos medios de los lados de un triángulo son: $P(2,5)$, $Q(4,2)$ y $R(1,1)$. Determinar las coordenadas de los vértices.

Solución:

Denotamos los vértices por $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ y suponemos que P es el punto medio del segmento AB , Q es el punto medio del segmento AC y R es el punto medio del lado BC . Expresamos las ecuaciones para las componente x de los tres puntos.

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{x_1 + x_2}{2} & 4 &= \frac{x_1 + x_3}{2} & 1 &= \frac{x_2 + x_3}{2} \\ 4 &= x_1 + x_2 & 8 &= x_1 + x_3 & 2 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Despejamos x_1 en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$4 = x_1 + x_2 \quad \text{entonces} \quad x_1 = 4 - x_2$$

Así obtenemos una cuarta ecuación

$$\begin{aligned} 8 &= x_1 + x_3 \\ 8 &= 4 - x_2 + x_3 \\ 4 &= -x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos el sistema formado por la tercera y cuarta ecuación.

$$\begin{aligned} 2 &= x_2 + x_3 \\ 4 &= -x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 6 &= 2x_3 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

A partir de la ecuación $4 = -x_2 + x_3$ se obtiene el valor de x_2

$$\begin{aligned} 4 &= -x_2 + x_3 \quad \text{entonces} \quad x_2 = x_3 - 4 \\ x_2 &= 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

Al sustituir x_2 en la ecuación $4 = x_1 + x_2$ se determina el valor de x_1 :

$$\begin{aligned} 4 &= x_1 + x_2 \quad \text{entonces} \quad x_1 = 4 - x_2 \\ x_1 &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

Ya se conoce la primera componente de cada vértice

$$A(5, y_1) \quad B(-1, y_2) \quad C(3, y_3)$$

Para los componentes en y podemos proceder de forma similar

$$5 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad 2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \quad 1 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$10 = y_1 + y_2$$

$$4 = y_1 + y_3$$

$$2 = y_2 + y_3$$

Despejamos y_1 de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$10 = y_1 + y_2 \quad \text{entonces} \quad y_1 = 10 - y_2$$

En la segunda ecuación

$$4 = y_1 + y_3$$

$$4 = 10 - y_2 + y_3$$

$$-6 = -y_2 + y_3$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones resultantes.

$$2 = y_2 + y_3$$

$$-6 = -y_2 + y_3$$

Sumando las ecuaciones obtenemos el valor de y_3

$$-4 = 2y_3$$

$$y_3 = -2$$

Sustituimos y_3 en la ecuación $2 = y_2 + y_3$

$$2 = y_2 + y_3$$

$$2 = y_2 - 2$$

$$4 = y_2$$

Sustituimos y_2 en la ecuación $10 = y_1 + y_2$

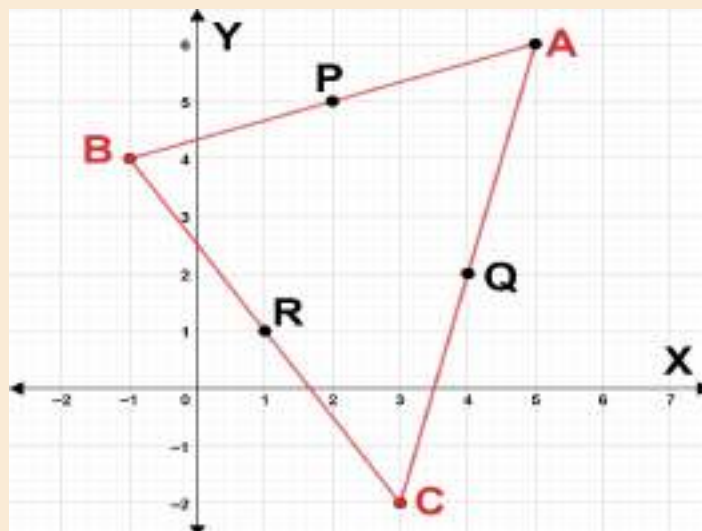
$$10 = 4 + y_1$$

$$y_1 = 6$$

Los vértices del triángulo son:

$$A(5,6) \quad B(-1,4) \quad C(3,-2)$$

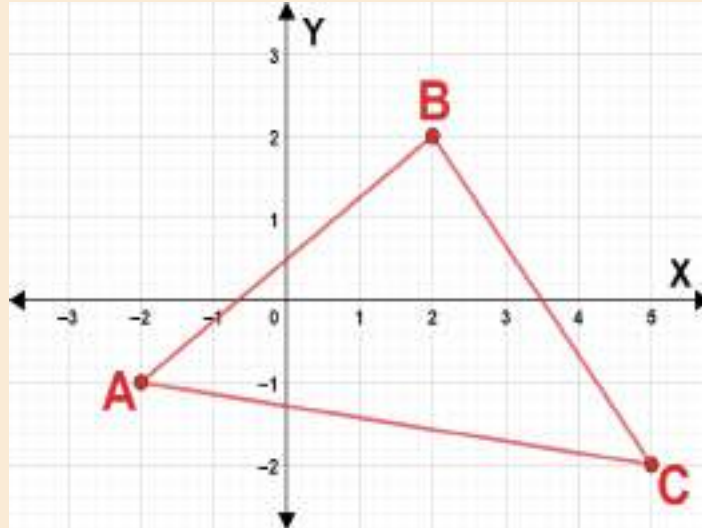
En la siguiente figura se presenta el triángulo, sus vértices y puntos medios.



4. Se sabe que los vértices de un triángulo se ubican en $A(-2, -1)$, $B(2, 2)$ y $C(5, -2)$. De acuerdo con la medida de sus lados, determinar que tipo de triángulo es.

Solución:

En la siguiente figura se muestra el triángulo dado



Vamos a calcular la medida de los lados por medio de la distancia entre los vértices:

$$d(A, B) = \sqrt{(2 + 2)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$d(A, C) = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

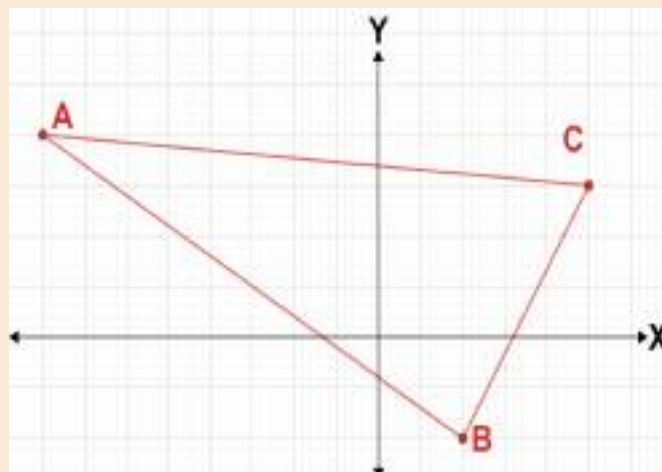
$$d(B, C) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Respuesta:

El triángulo es isósceles pues los lados AB y BC tienen la misma medida.

.....

5. Para el triángulo rectángulo que se muestra en la figura, verificar que el punto medio de la hipotenusa equisita de los tres vértices.



Solución:

Los vértices del triángulo son $A(-8, 4)$, $B(2, -2)$ y $C(5, 3)$, con el segmento AC como hipotenusa. El punto medio P de este segmento es:

$$x = \frac{-8+5}{2} = -\frac{3}{2} \quad y = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$P \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

Con base en el concepto de punto medio, sabemos que divide al segmento en dos partes de igual medida, por lo que $d(P, A) = d(P, C)$

$$d(P, A) = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} + 8\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{42.25 + 0.25} \cong 6.52$$

$$d(P, B) = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{12.25 + 30.25} \cong 6.52$$

Se verifica que el punto medio de la hipotenusa está a la misma distancia de los vértices del triángulo rectángulo dado.

.....

2.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

- Determinar las coordenadas del punto medio del segmento $P(x, y)$ con extremos $A(-3, -5)$ y $B(2, 4)$
R/ $P \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$
- Determinar las coordenadas de tres puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$ que dividen en cuatro segmentos de igual longitud al segmento con extremos en los puntos $A(-6, 4)$ y $B(5, -3)$
R/ $\left(-\frac{13}{4}, \frac{9}{4} \right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ y $\left(\frac{9}{4}, -\frac{5}{4} \right)$
- Uno de los extremos de un segmento de recta es $A(7, 2)$ y su punto medio es $P(1, -3)$. Hallar las coordenadas del otro extremo B
R/ $B(-5, -8)$
- Los vértices de un triángulo son $A(2, 7)$, $B(3, -1)$ y $C(-6, 2)$ y D el punto medio del segmento AC . Determinar la medida de la mediana de B a D
R/ 7.43
- Determinar los valores que puede tomar la componente en y para que los puntos $(-3, -2)$ y $(2, y)$ se encuentren a 8 unidades de distancia.
R/ Los valores que puede tomar la componente y son: 4.24 y 8.24

3. Ecuación de la recta

El estudio de la geometría analítica establece relaciones entre una ecuación y el conjunto de puntos del plano que la satisfacen. Este conjunto de puntos del plano se denomina lugar geométrico de la ecuación o más comúnmente, gráfica de la ecuación.

Es importante tener presente que si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, entonces el punto pertenece a la gráfica. De forma recíproca, si un punto está en la gráfica de una ecuación, entonces sus coordenadas satisfacen dicha ecuación.

Con este enfoque es de mucha utilidad identificar las intercepciones de una gráfica con los ejes coordenados; que con relación al eje X se refiere a la abscisa del punto donde la curva intersecta este eje. El método general para determinar su valor es resolviendo la ecuación $y = 0$.

La intercepción con el eje Y es la ordenada del punto en el cual la gráfica intersecta dicho eje, como su valor se encuentra evaluando la ecuación en $x = 0$, se llama intercepción en el origen.

Se inicia el estudio de la línea recta en el plano por ser la ecuación y la gráfica más sencilla.

Definición de línea recta.

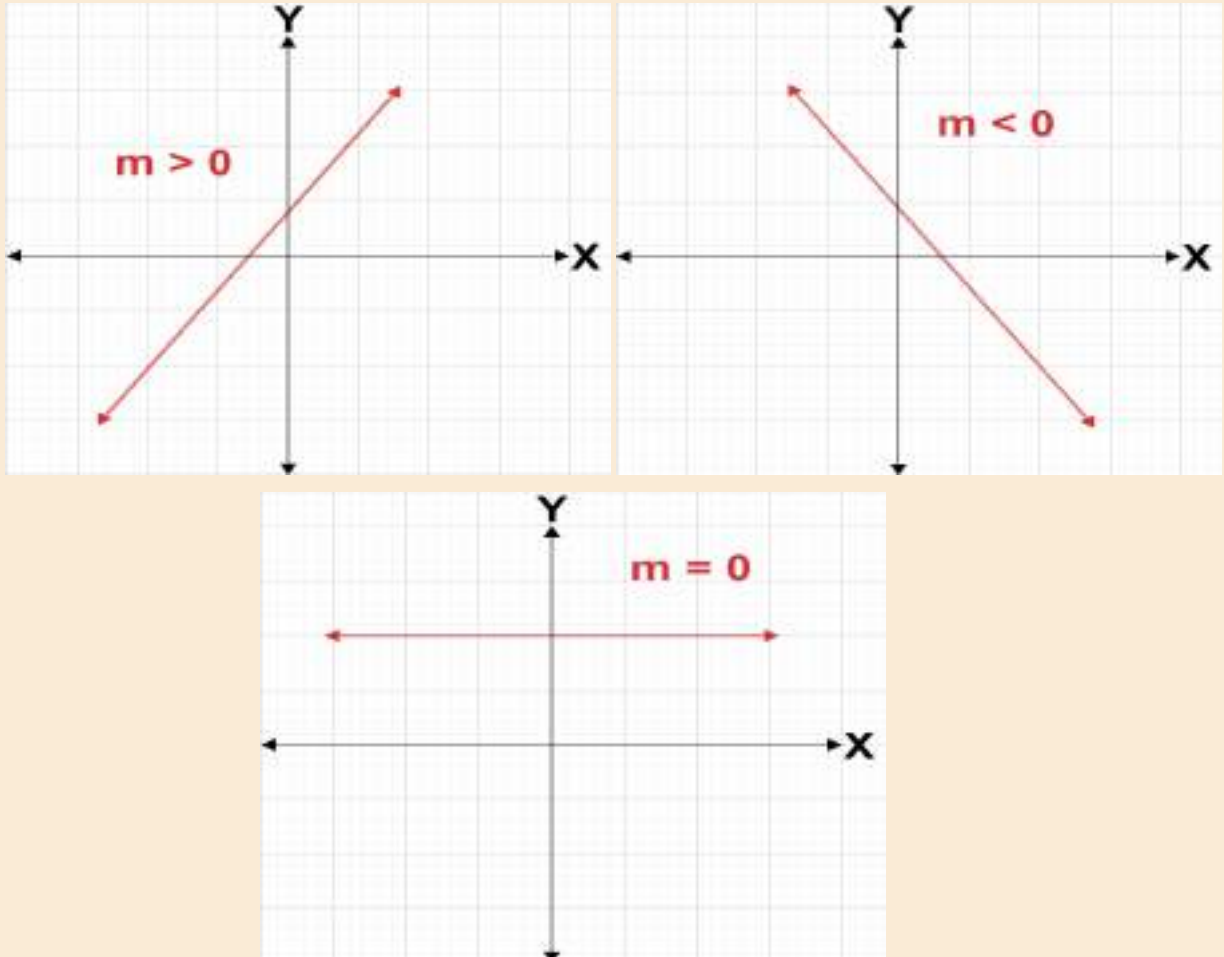
Por su carácter intuitivo, el concepto de línea recta es bastante conocido; además, previamente se han estudiado ecuaciones y funciones lineales, así como fundamentos de la Geometría euclídea que postulan que dos puntos son necesarios y suficientes para trazar una recta.

Una recta se puede definir como el conjunto de puntos del plano tales que al considerar dos puntos cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, el valor $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$, es constante.

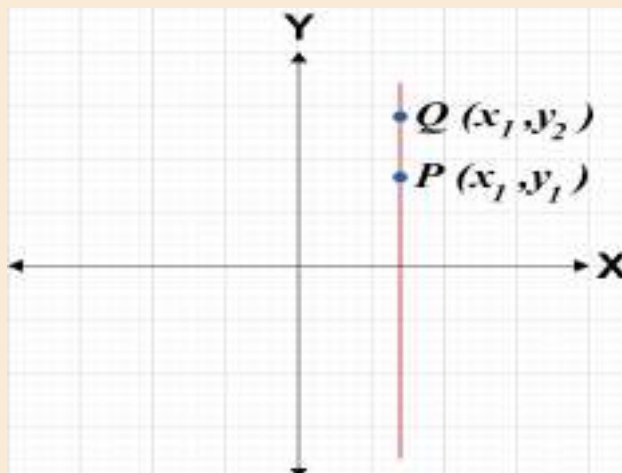
La razón m que compara la variación de las componentes y con relación a la variación de las componentes x , se llama pendiente de la recta; dicho valor pertenece a los números reales e indica

una medida de la inclinación de la gráfica con respecto al eje X .

En las figuras se muestran gráficas de rectas con pendiente positiva, pendiente negativa y pendiente cero.



Para el caso de rectas verticales, los puntos comparten la misma componente en X , por lo que la pendiente no está definida.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como el denominador $x_2 - x_1 = 0$, m está indefinida.

Una pregunta que surge muchas veces se relaciona con la identificación de los puntos y sus coordenadas. Por ejemplo; consideremos $P(-3, 5)$ y $Q(2, 1)$ y calculemos la pendiente de la recta que pasa por ellos.

a) $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$

$$m = \frac{1 - 5}{2 + 3} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

b) $Q(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$

$$m = \frac{5 - 1}{-3 - 2} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

En general, no importa cuál sea el punto inicial y cuál sea el final, la pendiente toma el mismo valor.

Ecuaciones de la recta

La ecuación de una recta con pendiente m , que intersecta el eje Y en el punto $(0, b)$, está dada por

$$y = mx + b$$

En el caso en que $b = 0$, $y = mx$ corresponde a una recta con pendiente m que pasa por el origen.

Si se conoce que una recta tiene pendiente m y que un punto $P(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, para cualquier otro punto de la recta con coordenadas (x, y) , podemos expresar:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

A partir de esta expresión se identifica como ecuación punto-pendiente, la siguiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Además, la ecuación general de una recta en el plano es:

$$Ax + By = C$$

con A , B y C números reales y A y B no son ambos iguales a cero.

Un ejemplo es:

$$3x + 5y = 2$$

que se puede transformar en:

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

■ Rectas paralelas

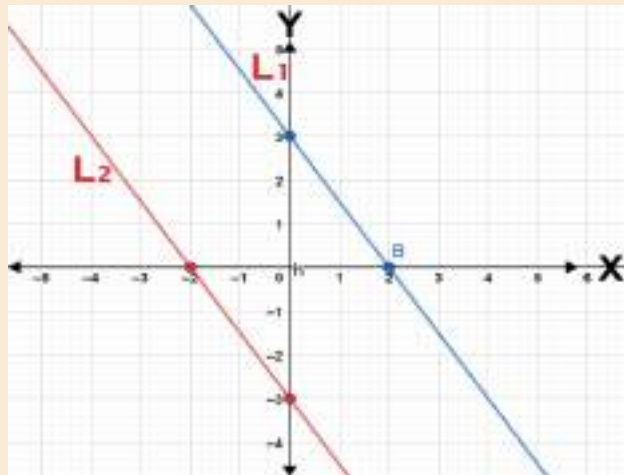
Dos rectas del plano L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 , son paralelas si y solo si $m_1 = m_2$

Es importante identificar dos implicaciones

a) Si L_1 es paralela a L_2 entonces $m_1 = m_2$

b) Si $m_1 = m_2$ entonces L_1 es paralela a L_2

Se muestra un ejemplo de rectas paralelas



■ Rectas perpendiculares

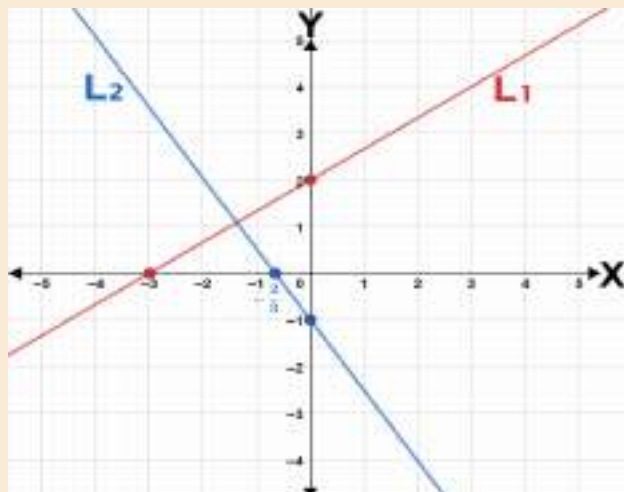
Dos rectas del plano L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y solo si $m_1 m_2 = -1$

La doble implicación que se expresa es:

a) Si L_1 es perpendicular a L_2 entonces $m_1 * m_2 = -1$

b) Si $m_1 * m_2 = -1$ entonces L_1 es perpendicular a L_2

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de la gráfica de rectas perpendiculares.



3.1 Ejercicios resueltos

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-4, 6)$ y $Q(3, -1)$, los interceptos con los ejes coordenados y su gráfica.

Solución:

La ecuación de la recta es de la forma

$$y = mx + b$$

Donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 6}{3 - (-4)} = \frac{-7}{7} = -1$$

Susituimos el valor de m y obtenemos

$$y = -x + b$$

Para determinar el valor de b evaluamos la ecuación de la recta en uno de los puntos dados, por ejemplo P :

$$6 = -(-4) + b$$

$$2 = b$$

Por lo que la ecuación de la recta es $y = -x + 2$

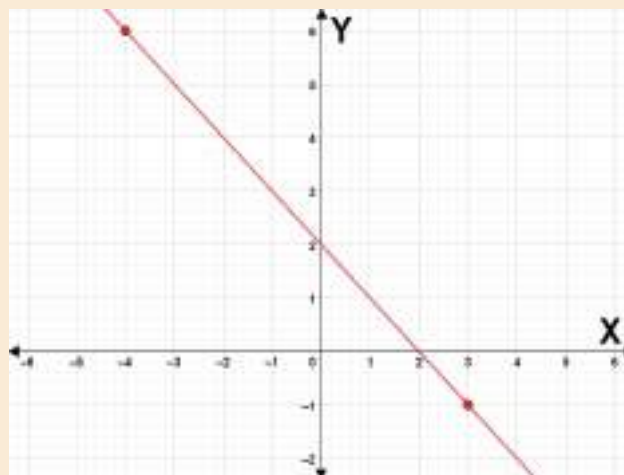
La intersección con el eje Y ya se conoce: $(0, 2)$. La intersección de la recta con el eje X se encuentra al resolver $y = 0$

$$-x + 2 = 0$$

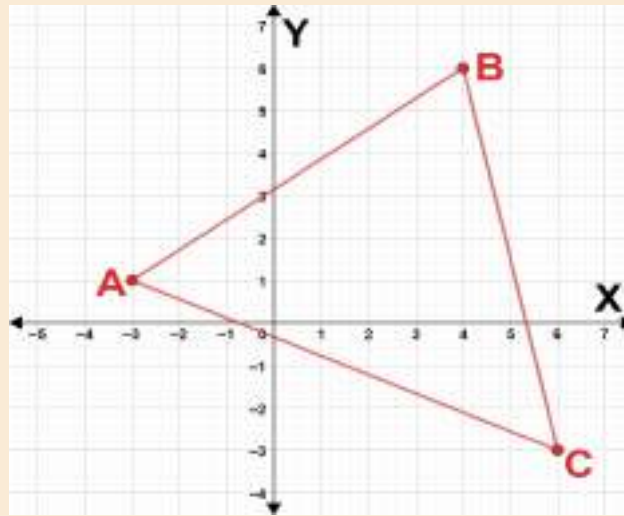
$$x = 2$$

El punto de intersección en el eje X tiene coordenadas $(2, 0)$

La gráfica se muestra en la siguiente figura



2. Con base en la figura mostrada, determinar la ecuación de la recta que pasa por el vértice B y es paralela al lado AC



Solución:

De la figura se obtiene que: $A(-3, 1)$, $B(4, 6)$ y $C(6, -3)$. La recta cuya ecuación se busca es paralela al segmento AC , por lo que tendrá la misma pendiente. Considerando $A(-3, 1)$ y $C(6, -3)$ se determina

$$m = \frac{-3 - 1}{6 + 3} = -\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta paralela a AC y que pasa por B es de la forma

$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{4}{9}x + b$$

Evalutando esta ecuación en $B(4, 6)$

$$6 = -\frac{4}{9}(4) + b$$

$$b = \frac{70}{9}$$

Entonces, la ecuación de la recta es

$$y = -\frac{4}{9}x + \frac{70}{9}$$

3. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - y + 8 = 0$ y $-3x + y - 2 = 0$

Solución:

Para determinar el punto de intersección de las rectas dadas, deben hallarse los valores x, y que satisfacen ambas ecuaciones; es decir, debemos resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se observa que el método de reducción es fácil de aplicar:

$$2x - y = -8$$

$$-3x + y = 2$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

Para determinar el valor de y , sustituimos x en la primera ecuación y despejamos

$$2(6) - y = -8$$

$$12 + 8 = y$$

$$y = 20$$

El punto de intersección es $P(6, 20)$

La ecuación de la recta buscada es de la forma

$$y = mx + b$$

Se conoce que $m = -2$, entonces

$$y = -2x + b$$

Evaluamos esta ecuación en $P(6, 20)$ y determinamos el valor de b

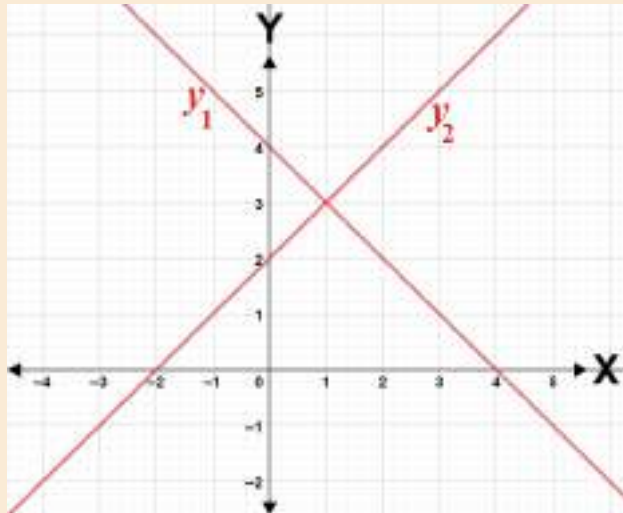
$$20 = -2(6) + b$$

$$b = 32$$

Así,

$$y = -2x + 32$$

4. En la figura se muestran dos rectas perpendiculares, determinar sus ecuaciones.



Solución:

Sabemos que si dos rectas son perpendiculares se cumple que $m_1 m_2 = -1$, por lo que al calcular una de las pendientes es posible conocer el valor de la otra.

Además, sabemos que para determinar la ecuación de una recta son necesarios y suficientes dos puntos.

Al observar la figura es posible identificar varios puntos para ambas rectas, por lo que existen varias opciones de las cuales se muestra una de ellas.

La recta y_1 pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 4)$, por lo que $m_1 = \frac{4 - 0}{0 - 4} = -1$

$$\text{Así, } m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Las ecuaciones son de la forma $y = mx + b$

$$y_1 = -x + b_1$$

$$y_2 = x + b_2$$

En la figura se observa que el intercepto en el origen para y_1 es 4, mientras que para y_2 es 2.

Entonces:

$$y_1 = -x + 4$$

$$y_2 = x + 2$$

5. Determinar el valor positivo k para que la recta $2x + 5y - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo cuya área mida 5 unidades cuadradas. Graficar la figura.

Solución:

La ecuación de la recta dada se puede escribir como

$$2x + 5y = k$$

o bien,

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{k}{5}$$

Esta recta intersecta al eje Y cuando $x = 0$ y $b = \frac{k}{5}$. La intersección en el eje X ocurre cuando $y = 0$,

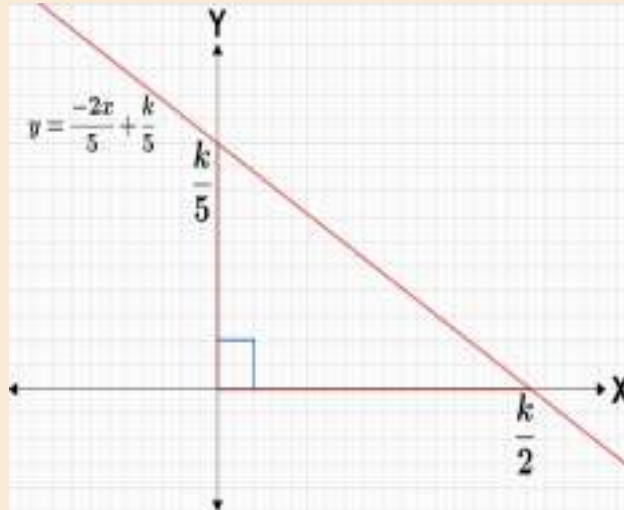
$$\text{o sea, } -\frac{2}{5}x + \frac{k}{5} = 0$$

$$\frac{k}{5} = \frac{2}{5}x$$

de donde

$$x = \frac{k}{2}$$

En la siguiente figura se muestra la situación.



Es posible establecer que la base del triángulo mide $\frac{k}{2}$, mientras que su altura está dada por $\frac{k}{5}$

El área del triángulo mide $5u^2$ y se expresa como:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Sustituimos el valor del área y las expresiones de b y h en función de k

$$5 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) \left(\frac{k}{5} \right)$$

$$5 = \frac{k^2}{20}$$

$$100 = k^2$$

$$\pm 10 = k$$

El valor positivo de k es 10 unidades.

.....

3.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 1)$ y $Q(3, 11)$

$$\mathbf{R/} y = \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

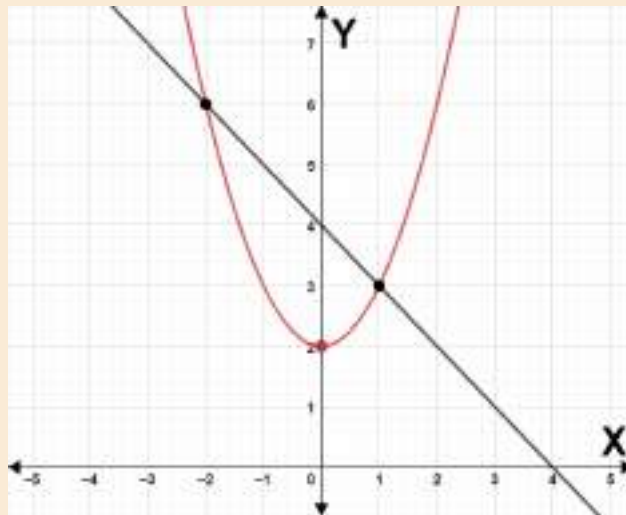
2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 2)$ y es paralela a la recta dada por $3x + 2y - 5 = 0$

$$\mathbf{R/} y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(10, 2)$ y es perpendicular a la recta $2x - 5y + 4 = 0$

$$\mathbf{R/} y = -\frac{5}{2}x + 27$$

4. Encontrar la ecuación de la recta que se muestra en la figura, si la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2$



$$\mathbf{R/} y = -x + 4$$

5. Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k - 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$

$$\mathbf{R/} k = 3.65 \text{ y } k = -1.65$$



4. Ecuación de la circunferencia

La circunferencia es uno de los primeros aprendizajes geométricos, como una curva cerrada “circular” que posteriormente se visualiza como perímetro del círculo.

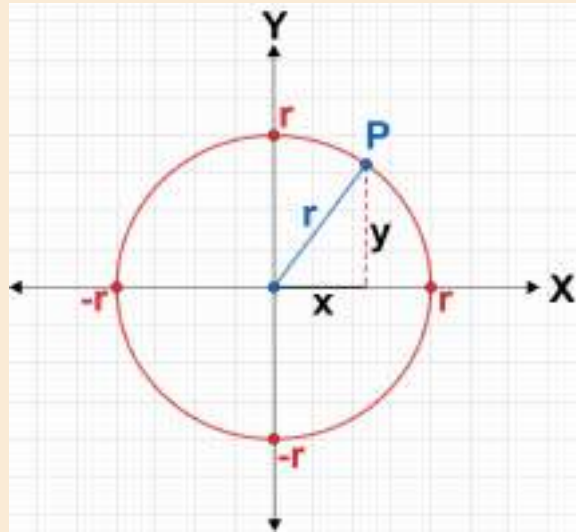
Su construcción es sencilla si se elige cualquier punto como centro y cualquier número real positivo como medida del radio.

Desde el enfoque de la Geometría Analítica se estudiará su ecuación y propiedades en el contexto de un sistema de coordenadas rectangulares.

Definición y la ecuación de la circunferencia

La circunferencia es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante se llama **radio**.

Ubiquemos una circunferencia de radio r y centro en el origen. Seleccionamos cualquier punto sobre la circunferencia $P(x, y)$ y trazamos un radio del origen a P . Al proyectar las coordenadas de P en ambos ejes, se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincide con el radio. Ver figura.

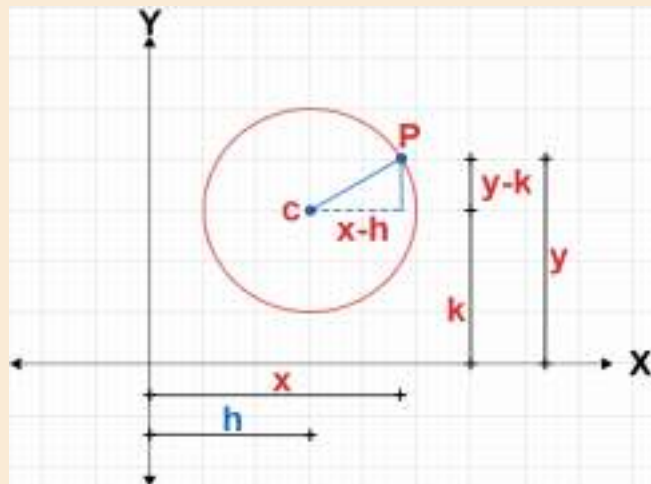


Como el triángulo formado es rectángulo, se cumple que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta expresión corresponde a una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio r .

Ahora bien, ubicamos el centro en un punto diferente del origen, $C(h,k)$ y procedemos de manera similar, es decir, desde un punto $P(x,y)$ se proyectan sus coordenadas perpendicularmente hasta los ejes coordenados y se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincide con el radio.



Los catetos del triángulo formado se pueden expresar como: $x - h$ y $y - k$

La ecuación de la circunferencia de radio r y centro en $C(h,k)$ está dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se conoce como ecuación centro-radio.

Si esta ecuación se desarrolla obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

Ordenando los términos cuadráticos, los lineales y las constantes obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Sustituyendo $-2h = D$, $-2k = E$ y $h^2 + k^2 - r^2 = F$ se obtiene la forma general de la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

.....

4.1 Ejercicios resueltos

1. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(3, 4)$ y $B(-2, -3)$. Determinar

- Ecuación centro-radio
- Ecuación general
- Representación gráfica

Solución:

- Como se conocen los extremos de un diámetro, al identificar el punto medio del segmento AB , se conocen las coordenadas del centro:

$$x = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$

entonces, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Para calcular el radio de la circunferencia hay varias opciones: determinar la longitud del diámetro y dividirla por 2, o calcular la distancia del centro a uno de los extremos del diámetro.

Se opta para calcular la longitud del diámetro

$$d = \sqrt{(3+2)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8.6$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{8.6}{2} = 4.3$$

La ecuación centro-radio es

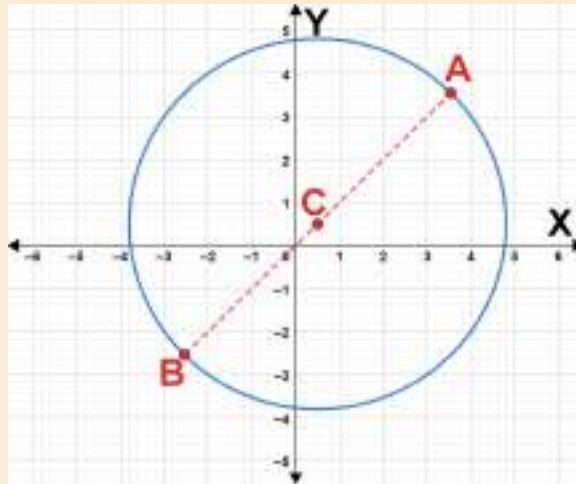
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 18.5$$

- La ecuación general la obtenemos desarrollando la expresión anterior

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - 18.5 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - y - 18 = 0$$

c) En la figura se muestra la representación gráfica de la circunferencia



2. Determinar el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación general dada y graficarla

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$$

Solución:

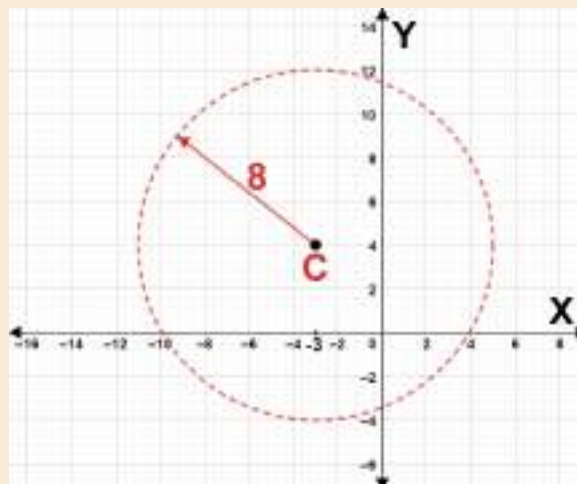
Para transformar la ecuación general a la estructura de la ecuación centro-radio, agrupamos los términos para la incógnita x , también los términos para y , para completar trinomios cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 8y) = 39$$

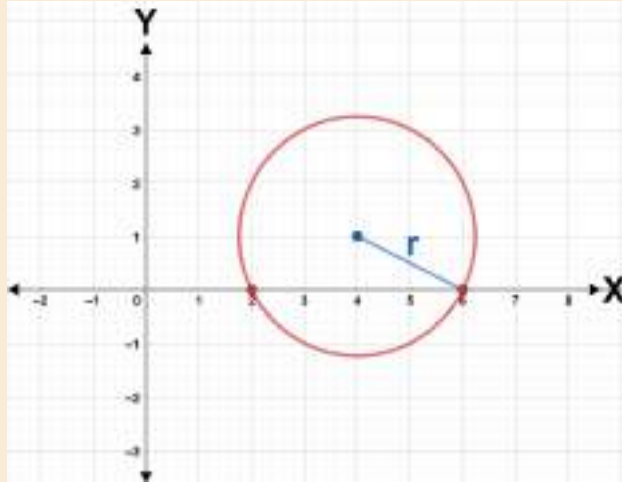
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 39 + 9 + 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$$

Las coordenadas del centro son $(-3, 4)$ y $r = 8$. La gráfica se muestra a continuación



3. Encontrar la ecuación general de la circunferencia que se muestra en la figura.



Solución:

En la figura se observa que el centro se ubica en $C(4, 1)$. El radio se puede calcular por medio de la distancia del centro a una de las intersecciones con el eje X , se elige el punto $(6, 0)$.

$$r = \sqrt{(6-4)^2 + (0-1)^2}$$

$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

La ecuación centro-radio está dada por:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 5$$

La ecuación general de la circunferencia es

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 5$$

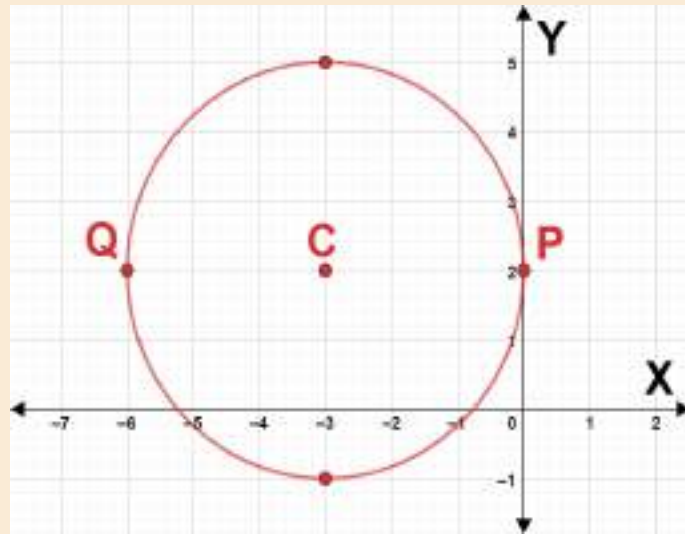
$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

.....

4. Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto $C(-3, 2)$ y cuya gráfica es tangente al eje Y .

Solución:

Aplicamos como estrategia representar en una gráfica la circunferencia con las propiedades indicadas.



Ubicamos el centro y colocamos el punto P colineal con el centro sobre el eje Y , que será externo del diámetro. También ubicamos puntos a la izquierda, arriba y abajo del centro.

La figura evidencia que $r = 3$. La ecuación centro-radio está dada por

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

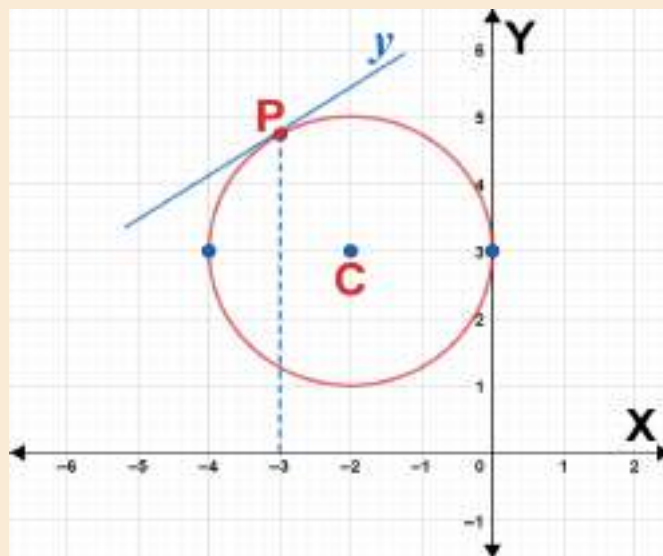
La ecuación general que se obtiene es:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

.....

5. Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P .



Solución:

El centro se ubica en el punto $C(-2, 3)$. Como la circunferencia es tangente al eje Y , la distancia horizontal del centro al eje es el radio, que es 2.

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

Podemos observar que el punto P pertenece a la circunferencia y también a la recta tangente.

El punto de tangencia tiene coordenadas $P(-3, y)$, y para encontrar la segunda componente evaluamos la coordenada conocida en la ecuación anterior.

$$(-3 + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$(y - 3)^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3} + 3$$

El punto P se ubica arriba del centro, así $P(-3, 3 + \sqrt{3})$. Determinamos la pendiente del segmento de C a P , que es r , el cual es perpendicular a la recta en el punto P .

$$m_1 = \frac{\sqrt{3} + 3 - 3}{-3 + 2} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

La pendiente de la recta tangente cumple con:

$$m_1 * m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La ecuación de la recta es de la forma

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$$

Evaluamos en P para hallar el valor de b

$$\sqrt{3} + 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-3) + b$$

$$2\sqrt{3} + 3 = b \cong 6.46$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + 3$$

o bien

$$y \cong 0.58x + 6.46$$

4.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene extremos de un diámetro en los puntos

$P(1, -4)$ y $Q(5, 6)$

R/ $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$

2. Determinar el centro y el radio de una circunferencia definida por la ecuación general

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 56 = 0$$

R/ $C(3, -2), r = \sqrt{41}$

3. Determinar las intersecciones con los ejes coordenados, de la circunferencia con centro en $C(3, 1)$ y radio 7.

R/ Eje X: $3 \pm \sqrt{48}$, **Eje Y:** $1 \pm \sqrt{40}$

4. Determinar la ecuación general de la circunferencia con centro en $C(5, -2)$ y que pasa por el punto $(-3, 1)$

R/ $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 44 = 0$

5. Si se conoce que una circunferencia tiene centro en $C(4, 5)$ y su gráfica es tangente al eje X, determinar la ecuación general.

R/ $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

5. Ecuación de la parábola

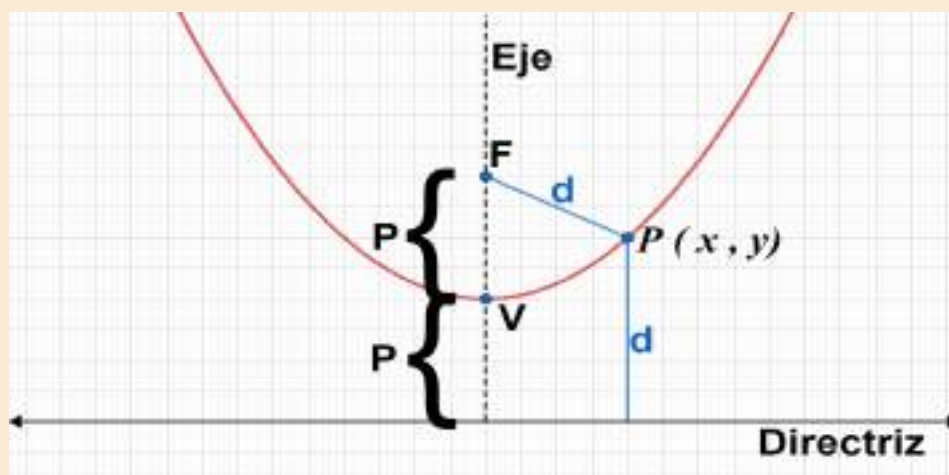
La curva conocida como parábola la hemos estudiado en asociación con la función cuadrática, por lo que algunas de sus propiedades ya son conocidas para el caso en el que el eje principal es vertical y se extenderán para casos en que dicho eje es horizontal y por lo tanto, la parábola ya no representa una función.

Los elementos principales de una parábola son: vértice, foco, recta directriz, lado recto y la ecuación.

La parábola: definición y ecuaciones

Una parábola es el conjunto de puntos del plano, $P(x, y)$, que están a la misma distancia de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.

El eje de la parábola es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.



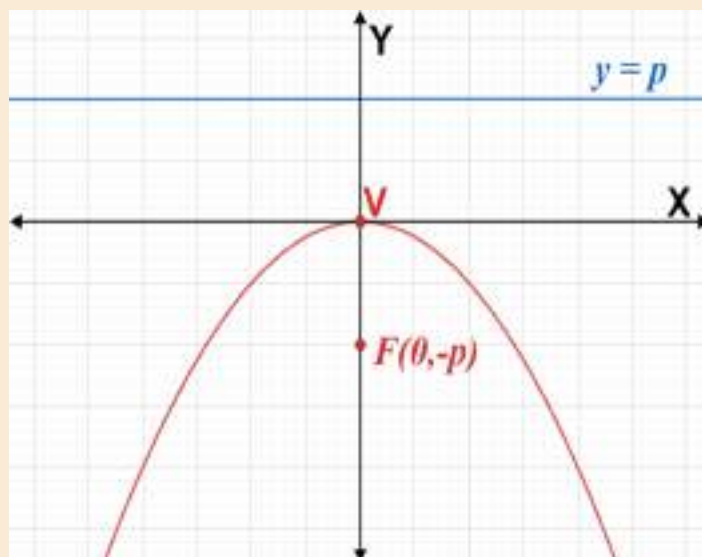
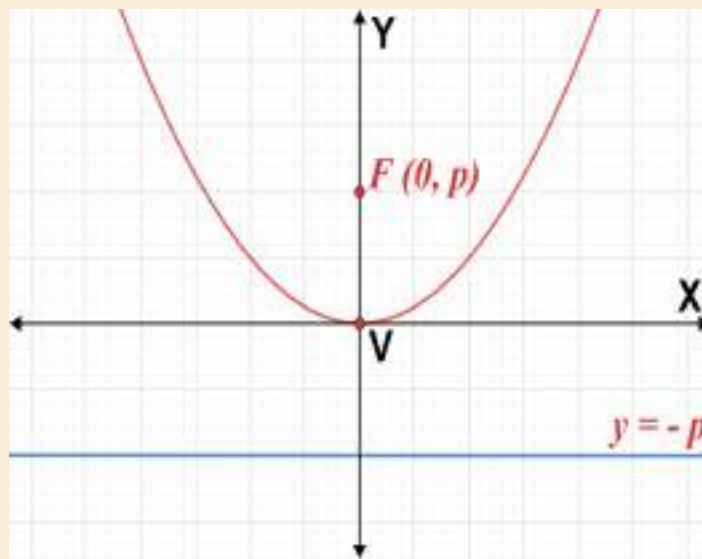
Las ecuaciones de la parábola que estudiaremos se expresan en la forma llamada normal o estándar, analizando los casos en que el vértice está en el origen $V(0,0)$ y cuando se encuentra en otro punto del plano $V(h,k)$.

Vértice en el origen $V(0,0)$

La ecuación es de la forma

$$x^2 = 4py$$

con p correspondiente a la coordenada del foco $F(0,p)$; así, la directriz es una recta horizontal con ecuación $y = -p$. Si $p < 0$ la parábola abre hacia abajo y entonces la recta directriz tiene ecuación $y = p$.



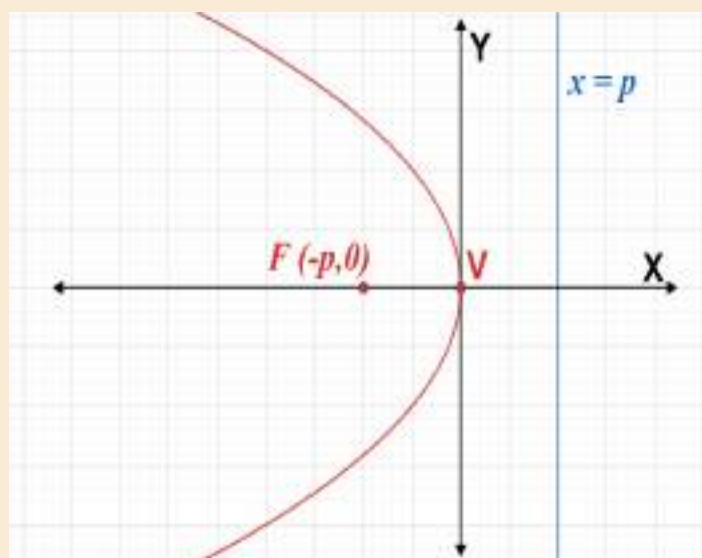
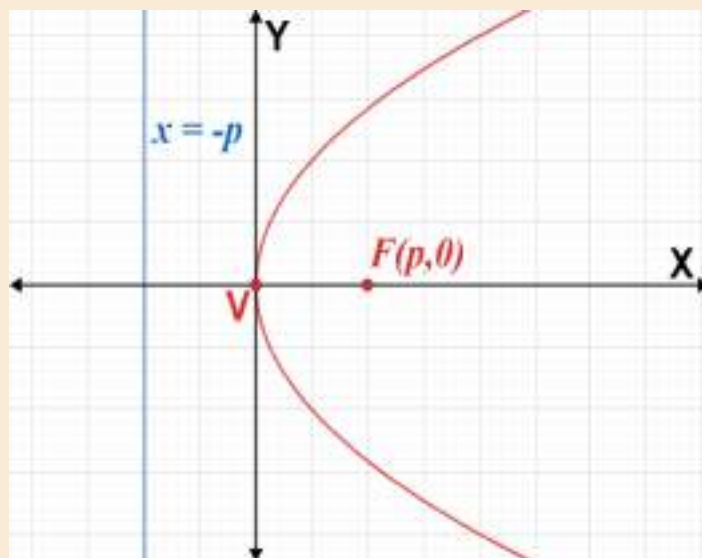
Para el caso en que el eje de la parábola es horizontal el foco tiene coordenadas $F(p,0)$ y la recta directriz es vertical con ecuación $x = -p$

Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda con foco en el punto $F(-p, 0)$ y la recta directriz con ecuación dada por $x = p$

La ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4px$$

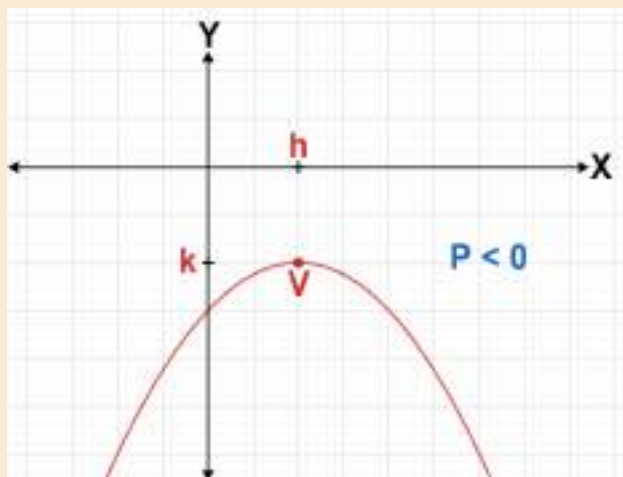
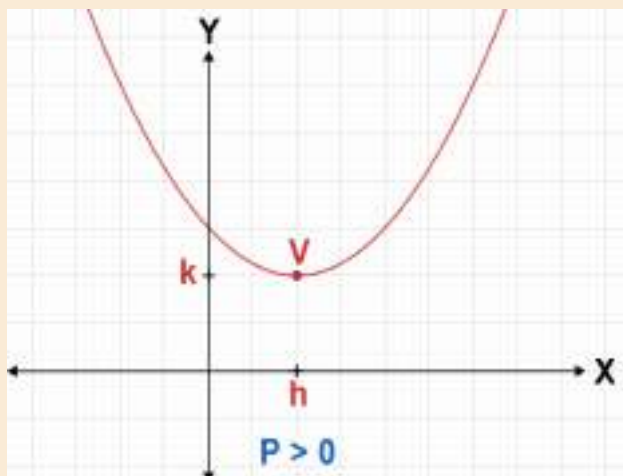
Las gráficas se muestran a continuación.



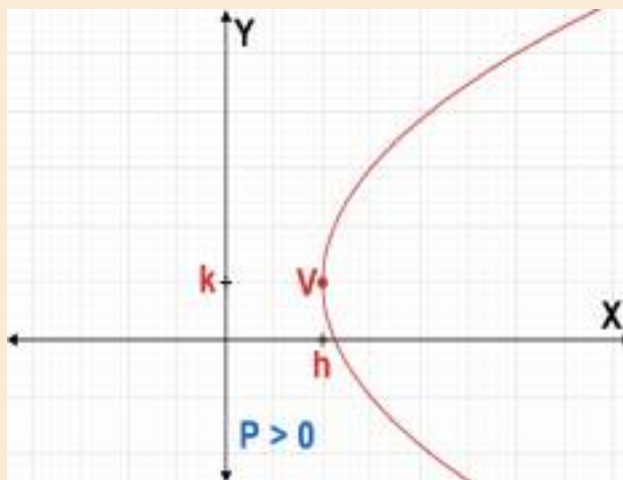
Vértice en $V(h, k)$

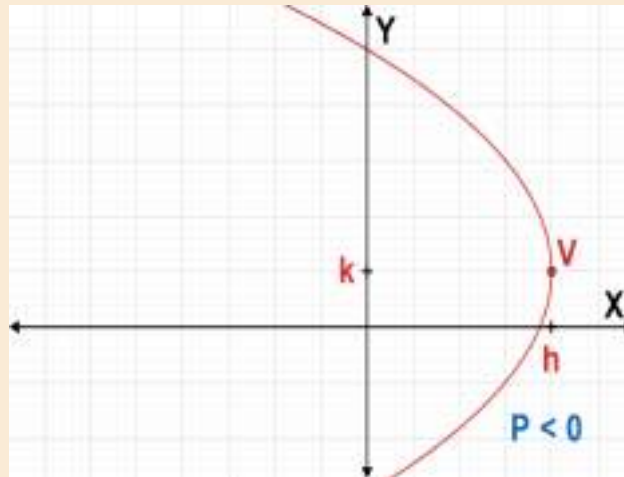
Los conceptos son similares y las ecuaciones representan traslaciones horizontales y verticales que se muestran en las figuras.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$





5.1 Ejercicios resueltos

1. Si una parábola con vértice en el origen y eje horizontal pasa por el punto $P(-2, 4)$, determinar
 - a) Coordenadas del foco
 - b) Ecuación de la recta directriz
 - c) Representación gráfica

Solución:

- a) Como la parábola tiene vértice en el origen y su eje es horizontal, la ecuación es de la forma

$$y^2 = 4px$$

Para determinar el valor p evaluamos la ecuación en $P(-2, 4)$

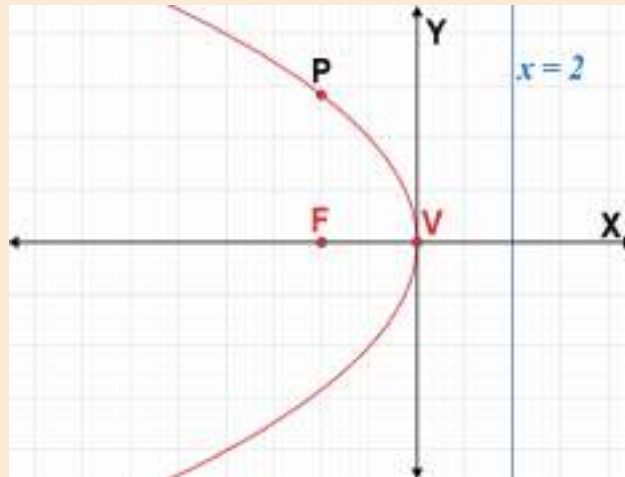
$$4^2 = 4p(-2)$$

$$16 = -8p$$

$$p = -2$$

La parábola abre hacia la izquierda y las coordenadas del foco son $F(-2, 0)$

- b) La recta directriz es vertical y su ecuación es $x = 2$
- c) La representación gráfica se muestra en la siguiente figura.



2. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en $V(-4,2)$ y foco en $F(-2,2)$. Determinar las intersecciones con los ejes coordenados y elaborar su gráfica.

Solución:

La componente y del vértice y el foco es la misma por que el eje principal es horizontal y la ecuación tiene forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$(y - 2)^2 = 4p(x + 4)$$

Para hallar el valor de p analizamos: el foco que se ubica a la derecha del vértice y esto significa que abre hacia la derecha. p es la distancia horizontal del vértice al foco, la cual es de 2 unidades. Entonces la ecuación es

$$(y - 2)^2 = 8(x + 4)$$

La intersección con el eje Y ocurre cuando $x = 0$, por lo que

$$(y - 2)^2 = 32$$

$$y - 2 = \pm 4\sqrt{2}$$

$$y = 2 \pm 4\sqrt{2}$$

La parábola intersecta el eje Y los puntos $(0, 7.66)$ y $(0, -3.66)$

La intersección de la parábola con el eje X ocurre para $y = 0$

$$(0 - 2)^2 = 8(x + 4)$$

$$4 = 8(x + 4)$$

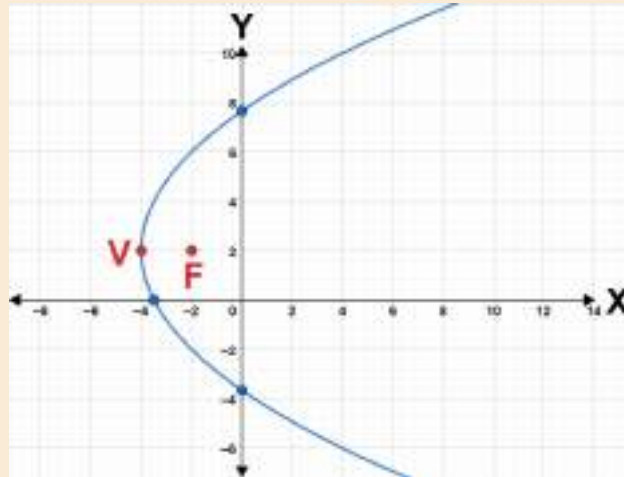
$$\frac{1}{2} = x + 4$$

$$\frac{1}{2} - 4 = x$$

$$-\frac{7}{2} = x$$

El punto de intersección con el eje X es $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

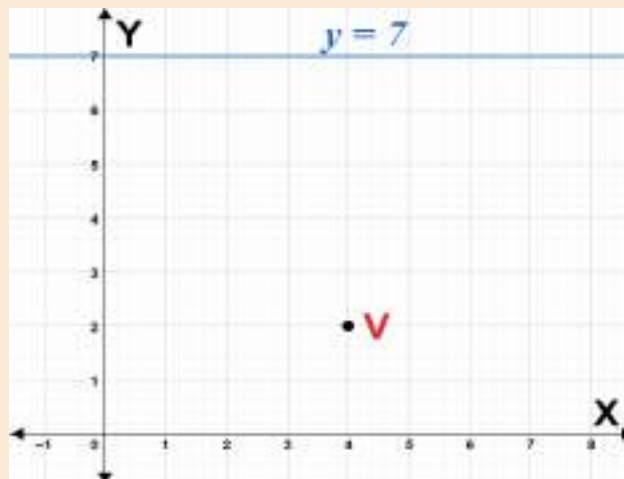
En la figura siguiente se muestra la parábola.



3. Establecer la ecuación de una parábola con vértice en $V(4, 2)$ y recta directriz $y = 7$.

Solución:

Si ubicamos el vértice y la directriz en un sistema coordenado, como se muestra en la figura, podemos notar que la parábola abre hacia abajo, ya que la directriz está arriba del vértice.



El foco se ubica a la misma distancia vertical del vértice que la directriz o sea, 5 unidades abajo del vértice, eso significa que $p = -5$.

La ecuación será de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x-4)^2 = 4(-5)(y-2)$$

$$(x-4)^2 = -20(y-2)$$

.....

4. Determinar el vértice, foco y directriz de la parábola con ecuación general dada por

$$y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$$

Solución:

Para transformar la ecuación dada a la forma estándar procedemos de forma similar como en la circunferencia.

$$y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$$

$$y^2 - 8y = -2x - 10$$

$$y^2 - 8y + 16 = -2x - 10 + 16$$

$$(y-4)^2 = -2x + 6$$

$$(y-4)^2 = -2(x-3)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola horizontal. Así identificamos que el vértice se ubica en $V(3,4)$. En la ecuación notamos que

$$4p = -2$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

Esto significa que la parábola abre hacia la izquierda y que el foco está a una distancia horizontal de $\frac{1}{2}$ del vértice. Sus coordenadas son:

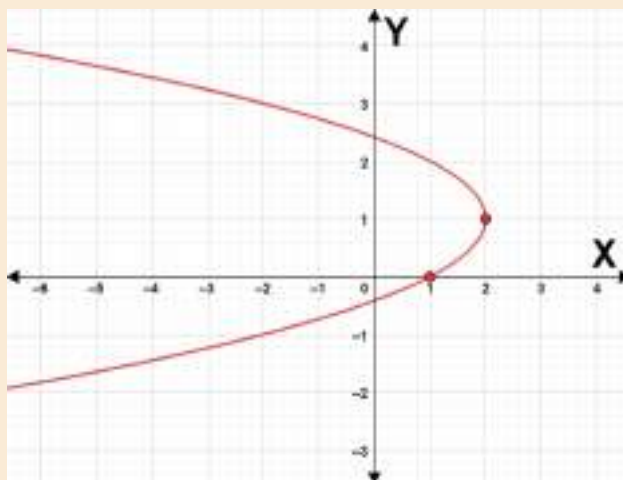
$$F(3-0.5, 4) = F(2.5, 4)$$

Finalmente, la directriz se ubica a una distancia horizontal de $\frac{1}{2}$ a la derecha del vértice. Su ecuación es

$$x = 3 + 0.5$$

$$x = 3.5$$

5. Determinar la ecuación de la parábola que se muestra en la siguiente figura



Solución:

Se observa que el vértice tiene coordenadas $V(2, 1)$, el eje es horizontal, abre hacia la izquierda por lo que $p < 0$ y, el punto $(1, 0)$ pertenece a la parábola.

La ecuación es de la forma $(y - 1)^2 = 4p(x - 2)$.

Se evalúa en el punto dado $(0 - 1)^2 = 4p(1 - 2)$ por lo que $1 = -4p$, de donde $-1 = 4p$. La ecuación es:

$$(y - 1)^2 = -(x - 2)$$

.....

5.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Escribir en forma estándar la siguiente ecuación

$$y = 6 + 6x - x^2$$

R/ $V(-2, -3)$, $F(-2, -\frac{19}{3})$, **Directriz:** $y = -\frac{11}{5}$

2. Determinar la ecuación de la parábola que tiene vértice en el punto $V(3, -2)$ y foco en $F(5, -2)$.

R/ $(y + 2)^2 = 8(x - 3)$

3. Determinar el vértice, foco y directriz de la parábola definida por la ecuación $-5y - x^2 - 4x - 19 = 0$

R/ $(x + 2)^2 = -5(y + 3)$

4. Determinar la ecuación de una parábola con vértice en $V(0, 0)$ y directriz $y = -\frac{7}{4}$

R/ $x^2 = 7y$

5. Encontrar el vértice, foco y directriz de la parábola dada por $y^2 - 6y - 12x + 33 = 0$

R/ $V(2, 3)$, $F(5, 3)$, **directriz** $x = -1$

6. Ecuación de la elipse

La elipse es una figura frecuente en el diseño arquitectónico, en astronomía y el trabajo industrial y artesanal que involucra arcos. En aplicaciones de la física ha sido utilizada para el estudio del movimiento de órbitas elípticas.

Sus elementos básicos son: centro, vértices focos, eje mayor, eje menor y la medida de su excentricidad.

Definición y representaciones

La elipse es el conjunto de puntos del plano $P(x,y)$ que satisfacen la condición: la suma de las distancias de P a dos puntos fijos llamados focos F_1 y F_2 , es constante.

El centro, los vértices y los focos se alinean en la recta llamada eje mayor, cuya medida corresponde a la distancia entre los vértices V_1 y V_2 .

Para ello, es necesario identificar si el centro se encuentra en el origen $C(0,0)$ o bien, se ubica en otro punto $C(h,k)$. En ambos casos, el eje mayor de la elipse puede ser horizontal o vertical.

Las ecuaciones y gráficas que se presentan siguen algunos convenios:

$$d(C,V) = a \quad d(C,F) = c$$

El otro eje de la elipse se llama eje menor y sus extremos se denotan como M_1 y M_2 ; para ellos se cumple que

$$d(C,M) = b$$

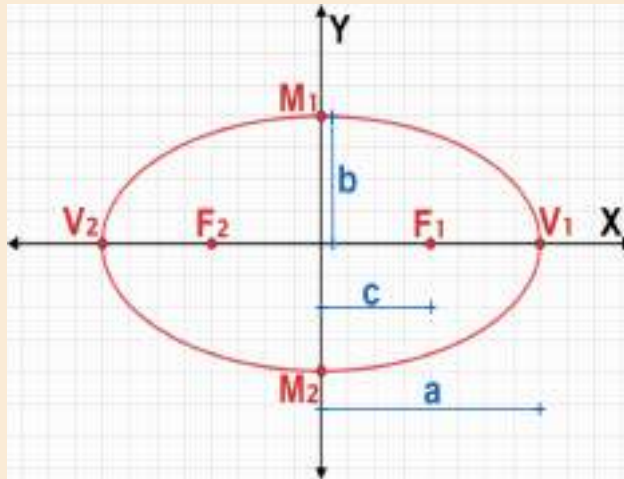
La excentricidad se mide así:

$$e = \frac{c}{a}$$

Si el centro se ubica en $C(0,0)$, la ecuación y la gráfica se muestran a continuación:

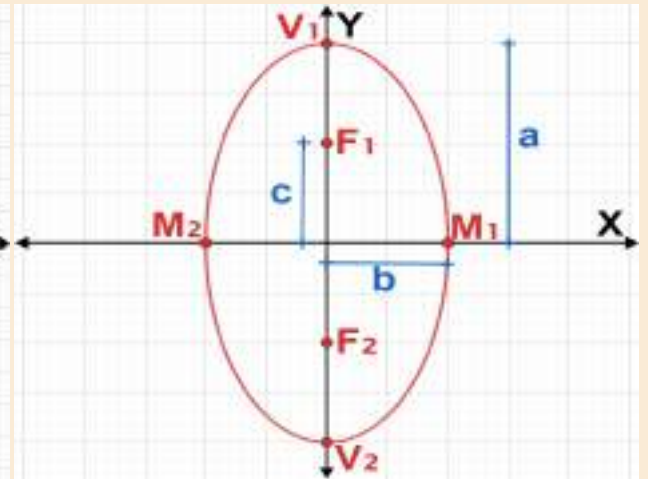
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a > b$$



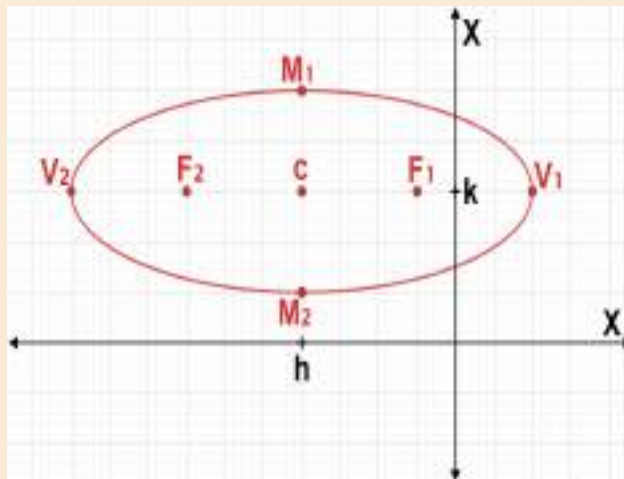
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a > b$$

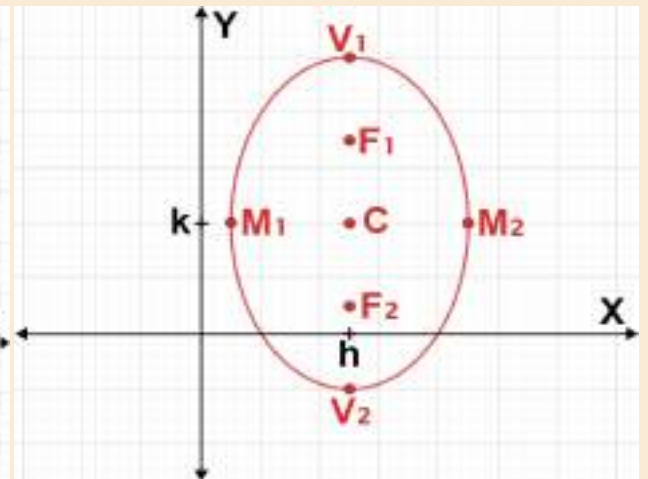


Como $a > b$ entonces es posible identificar si la elipse tiene su eje mayor horizontal o vertical, analizando cuál de los denominadores es el mayor. Por ejemplo, en la primera figura el eje es horizontal por lo que se asocia a^2 como denominador de x^2 ; en el otro caso a^2 es denominador de y^2 .

Si el centro de ubica en $C(h,k)$, se tienen las ecuaciones y gráficas que se muestran.



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

.....

6.1 Ejercicios resueltos

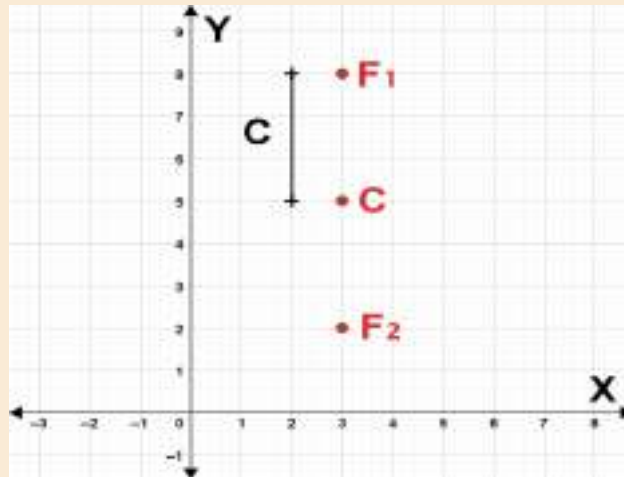
1. Los focos de una elipse se ubican en los puntos $F_1(3,8)$ y $F_2(3,2)$ y la longitud del eje mayor es 8 unidades. Determinar las coordenadas del centro, de los extremos del eje mayor, de los vértices, la ecuación y su gráfica.

Solución:

Empezamos por ubicar en el plano los focos y se visualiza una alineación vertical. El centro se ubica en el punto medio del segmento que une F_1 y F_2 , la componente en x es la misma:

$$y = \frac{8+2}{2} = 5$$

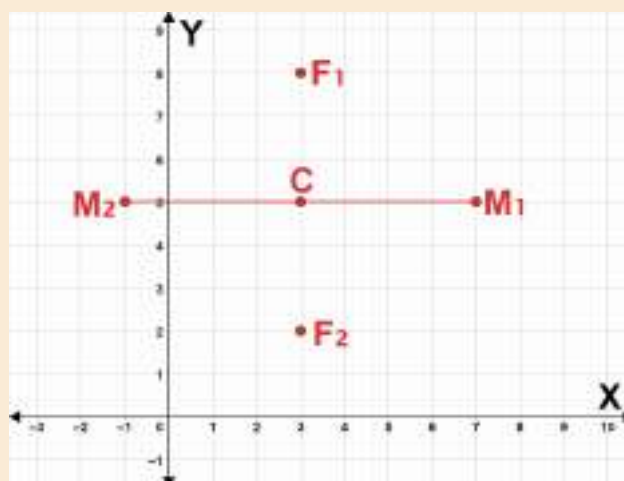
Por lo que $C(3,5)$ y la distancia focal es $c = 3$



El eje menor es horizontal ya que el eje mayor es vertical. Para encontrar las coordenadas de M_1 y M_2 , notamos que tendrán la misma coordenada en y que el centro, mientras que los componentes en x se ubican 4 unidades a la derecha y 4 unidades a la izquierda del centro, para que la longitud sea 8, es decir $b = 4$

$$M_1 = (3 + 4, 5) = (7, 5)$$

$$M_2 = (3 - 4, 5) = (-1, 5)$$



Conocemos que $b = 4$ y $c = 3$, para calcular la distancia a del centro a los vértices aplicamos la ecuación

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Despejamos a :

$$a = \sqrt{c^2 + b^2}$$

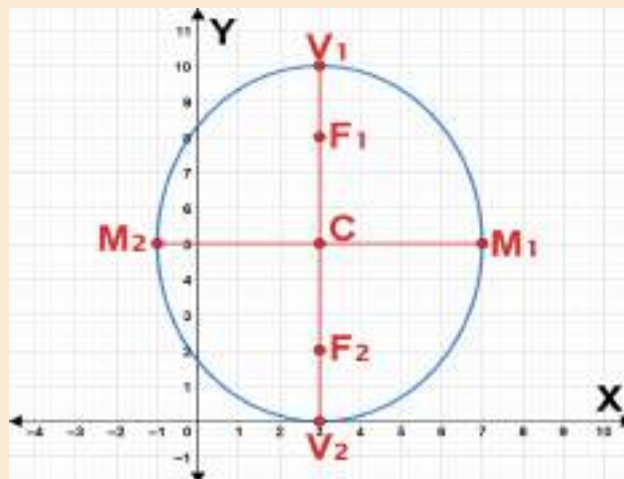
$$a = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Los vértices se alinean con el centro y los focos sobre el eje mayor, para determinar las coordenadas de V_1 y V_2 se mantiene la coordenada x del centro y se suma y resta 5 unidades a la componente y :

$$V_1 = (3, 5 + 5) = (3, 10)$$

$$V_2 = (3, 5 - 5) = (3, 0)$$

Se ubican los vértices en el plano y se traza la elipse.



La ecuación de la elipse con características dadas por $a = 5$, $b = 4$, $C(3, 5)$ y eje mayor paralelo al eje Y es,

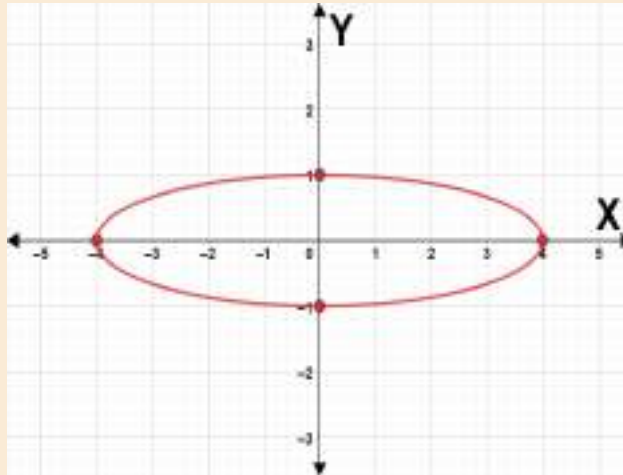
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

.....

2. Encontrar la ecuación de la elipse con vértices en $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$ y que intersecta al eje Y en los puntos cuando $y = 1$, $y = -1$

Solución:

Ubicamos los vértices y las intersecciones en el plano cartesiano, como se muestra en la figura.



Podemos decir que el centro se ubica en $C(0,0)$, el eje mayor coincide con el eje X y $a = 4$. Los extremos del eje menor son $M_1(0, 1)$ y $M_2(0, -1)$, por lo que $b = 1$

La ecuación de la elipse está dada por:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$$

.....

3. Analizar la ecuación dada para identificar las coordenadas del centro, vértices, focos y gráfica de la elipse.

$$\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Solución:

La ecuación es de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ por lo que el centro se ubica en $C(-4, 2)$.

$a^2 = 25$ entonces $a = 5$, al mismo tiempo $b^2 = 9$ entonces $b = 3$. El eje mayor es horizontal.

Las coordenadas de los vértices son:

$$V_1(-4+5, 2) = V_1(1, 2)$$

$$V_2(-4-5, 2) = V_2(-9, 2)$$

Los extremos del eje menor se ubican en

$$M_1(-4, 2+3) = M_1(-4, 5)$$

$$M_2(-4, 2-3) = M_2(-4, -1)$$

Calculamos c por medio de la expresión

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

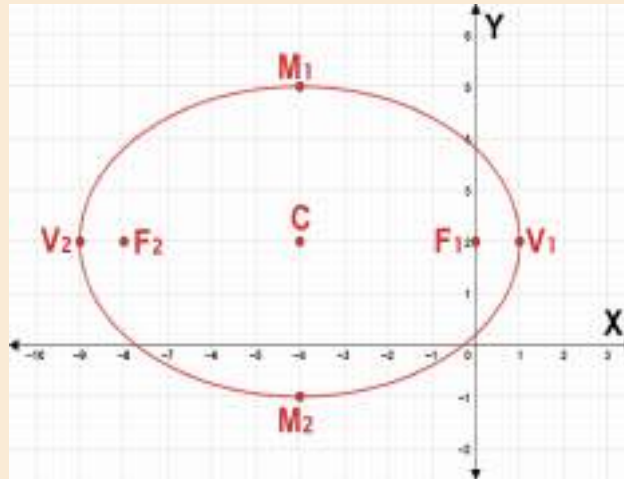
$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Las componentes de los focos son:

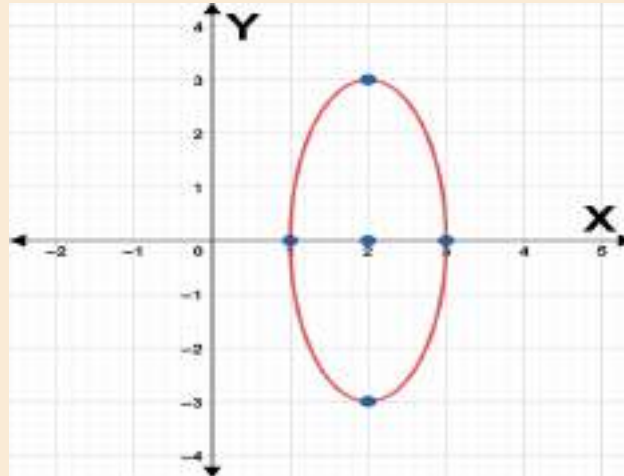
$$F_1(-4 + 4, 2) = F_1(0, 2)$$

$$F_2(-4 - 4, 2) = F_2(-8, 2)$$

Al ubicar los vértices y los puntos M_1 y M_2 , podemos trazar la gráfica que se muestra



4. Determinar la ecuación de la elipse que se muestra



Solución:

En la figura podemos identificar las coordenadas del centro, los vértices y los extremos del eje menor: $C(2, 0)$, $V_1(2, 3)$, $V_2(2, -3)$, $M_1(3, 0)$ y $M_2(1, 0)$.

El eje mayor es vertical, la distancia del centro a uno de los vértices es: $a = 3$ mientras que la distancia del centro a uno de los extremos del eje menor es $b = 1$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-0)^2}{9} = 1$$

$$(x-2)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

.....

5. Determinar las coordenadas del centro, vértices y focos de la elipse definida por la ecuación

$$4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 5$$

Solución:

Agrupamos los términos en x , en y , y completamos trinomios cuadrados perfectos.

$$(4x^2 + 8x \quad) + (3y^2 - 6y \quad) = 5$$

$$4(x^2 + 2x + 1) + 3(y^2 - 2y + 1) = 5 + 4 + 3$$

$$4(x+1)^2 + 3(y-1)^2 = 12$$

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$C(-1, 1)$, el eje mayor es vertical, por lo que $a^2 = 4 \rightarrow a = 2$, $b^2 = 3$, entonces

Las coordenadas de los vértice son:

$$V_1(-1, 4 + 2) = V_1(-1, 3)$$

$$V_2(-1, 1 - 2) = V_2(-1, -1)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 3} = 1 \text{ entonces } c = 1$$

Las coordenadas de los focos son:

$$F_1(-1, 1 + 1) = F_1(-1, 2)$$

$$F_2(-1, -1 - 1) = F_2(-1, -2)$$

.....

6.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

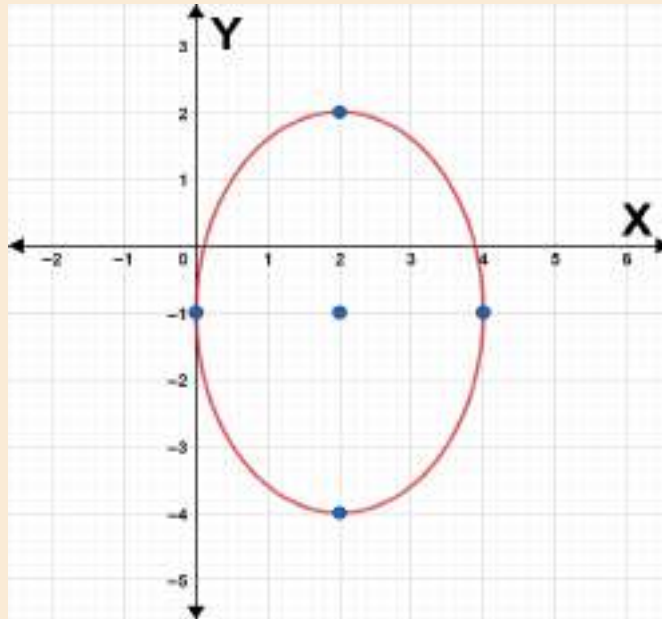
1. Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $V_1(-5, 0)$ y $V_2(5, 0)$ y cuyos focos se ubican en $F_1(-4, 0)$ y $F_2(4, 0)$

$$\mathbf{R/} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2. Hallar la longitud del eje menor y la excentricidad de una elipse que tiene centro en $C(3, 4)$, uno de los vértices en $V(-3, -4)$ y uno de los focos en $F(5, -4)$

$$\mathbf{R/} \quad 2b = 8\sqrt{2}, \quad e = \frac{1}{3}$$

3. Determinar la ecuación de la elipse que se muestra en la figura



$$\mathbf{R/} \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

4. Hallar la ecuación de la elipse con centro en $C(1,2)$, foco en $F(1,4)$ y que pasa por el punto $(2,2)$.

$$\mathbf{R/} (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

5. Determinar el centro, vértices y focos de la elipse definida por la ecuación

$$9x^2 + y^2 - 18x = 0$$

$$\mathbf{R/} C(1,0), V_1(2,0), V_2(0,0), F_1\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), F_2\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$$



7. Ecuación de la hipérbola

La hipérbola es una curva cuya presencia en situaciones cotidianas es poco visible, pues consta de dos ramas que parecen separadas pero su comportamiento está fuertemente relacionado.

Su estudio se parece al de la elipse en el sentido que posee dos vértices y dos focos alineados con el centro. La distancia entre los focos se llama **eje focal** y su longitud está dada por **2c**. La distancia entre los vértices mide **2a**, pero se diferencia de la elipse en que se denomina **eje transversal o eje transversal**.

El eje perpendicular al eje transversal, que pasa por el centro y tiene extremos en los puntos W_1 y W_2 , se llama **eje conjugado**.

La excentricidad de una hipérbola está dada por

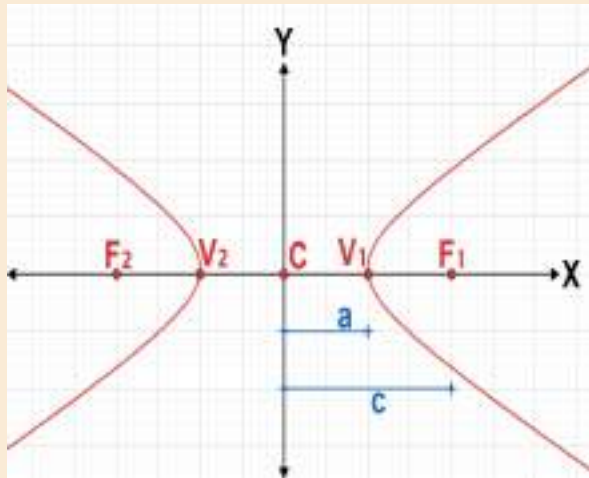
$$e = \frac{c}{a} \text{ con } c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

Definición y ecuaciones

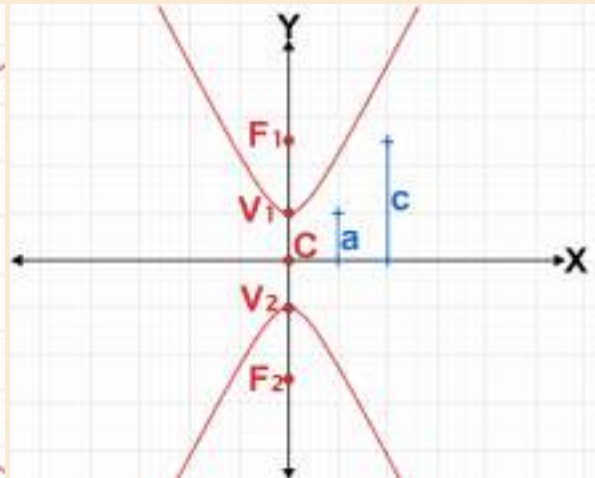
Una hipérbola está constituida por el conjunto de puntos del plano $P(x,y)$ que satisfacen la condición: la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos llamados focos, es constante.

Las ecuaciones de la hipérbola consideran dos casos: si el centro se ubica en el origen $C(0,0)$ o bien, en un punto diferente $C(h,k)$; para cada uno se analiza si el eje transversal es horizontal o vertical.

Si el centro se ubica en $C(0,0)$ la ecuación y la gráfica se muestran a continuación

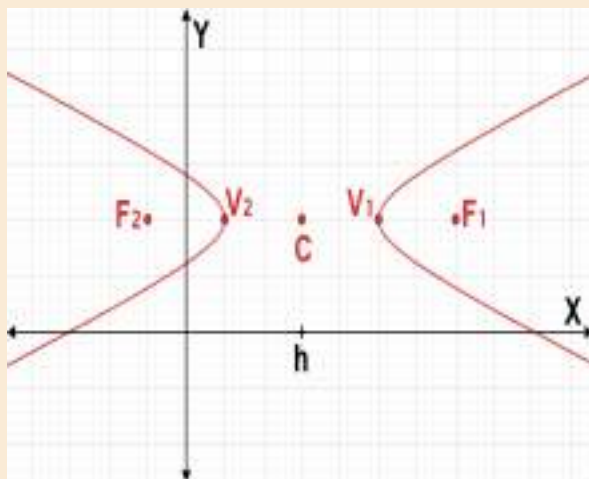


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

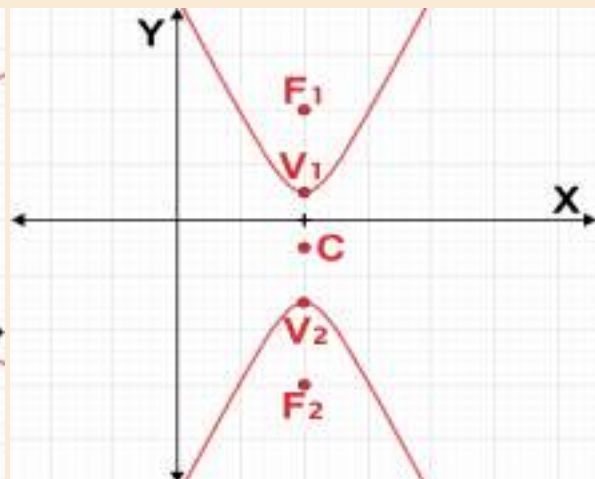


$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Si el centro se ubica en $C(h,k)$ la ecuación y la gráfica se muestran a continuación



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

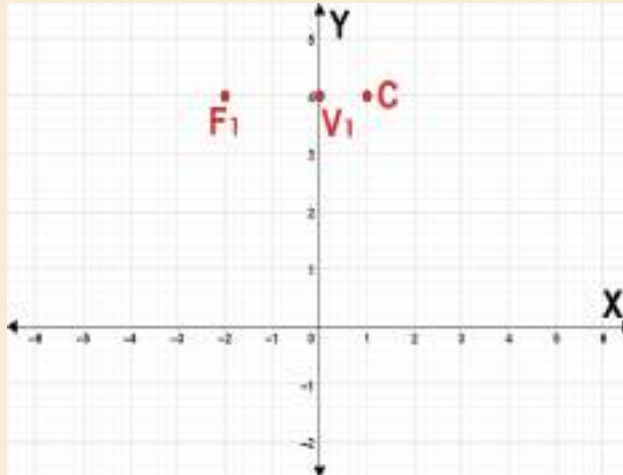
.....

7.1 Ejercicios resueltos

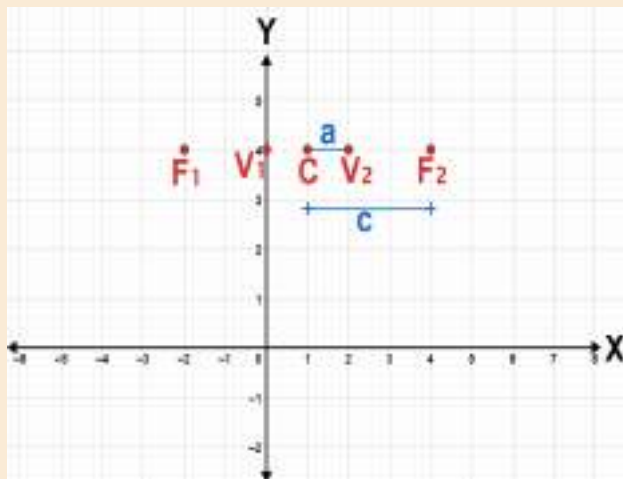
1. Graficar la hipérbola con centro en $C(1,4)$, uno de los focos en $F_1(-2,4)$ y un vértice en $V_1(0,4)$.

Solución:

Para iniciar, ubicamos en el plano cartesiano los puntos dados.



Observamos que la distancia del centro al vértice es $a = 1$ y la distancia del centro al foco es: $c = 3$. El otro vértice y el otro foco se ubican a la derecha del centro a las mismas distancias, como se muestra en la figura.



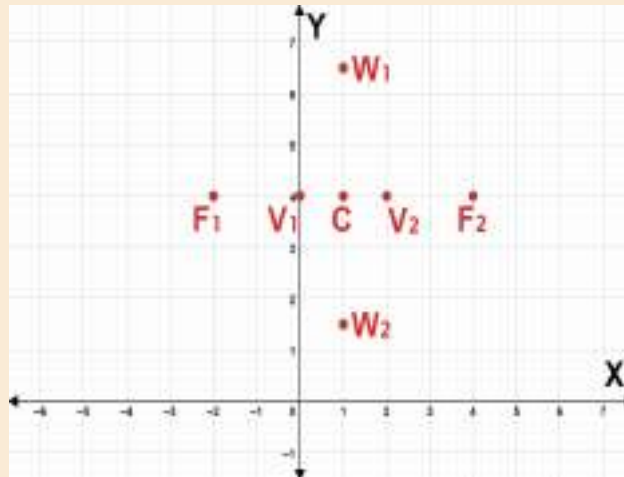
Calculamos la distancia del centro a los extremos del eje conjugado:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

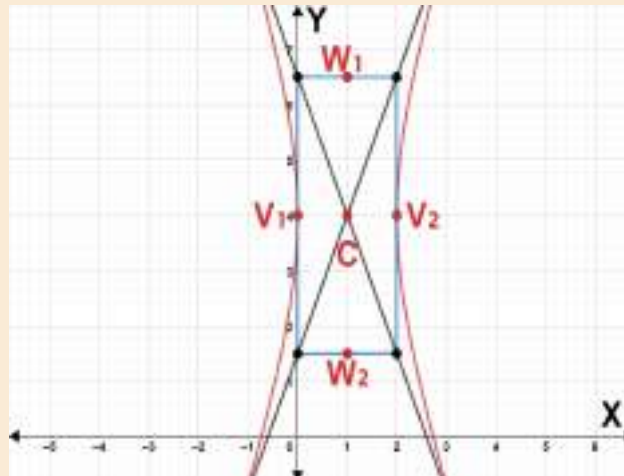
$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} \cong 2.83$$

El eje conjugado es vertical y sus extremos W_1 y W_2 se muestran en la figura siguiente; en $W_1(1, 6.83)$ y $W_2(1, 1.17)$



A continuación, trazamos un rectángulo con segmentos que pasan por V_1 , V_2 , W_1 y W_2 . Luego, trazamos rectas que pasan por el centro y los vértices opuestos del rectángulo. La gráfica de la hipérbola se construye a partir de los vértices y la trayectoria de las rectas, que se llaman **asíntotas**.



.....

2. Determinar las coordenadas del centro, los vértices y los focos de la hipérbola definida por la ecuación

$$\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

Solución:

El centro tiene coordenadas $C(2, -3)$. En la ecuación se identifica que $a^2 = 4$ por lo que $a = 2$; $b^2 = 9$ entonces $b = 3$. Además, el eje transversal es vertical.

Los vértices se ubican en los puntos

$$V_1(2, -3 + 2) = V_1(2, -1)$$

$$V_2(2, -3 - 2) = V_2(2, -5)$$

Para determinar las coordenadas de los focos, necesitamos el valor de c , que calculamos así:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3.6$$

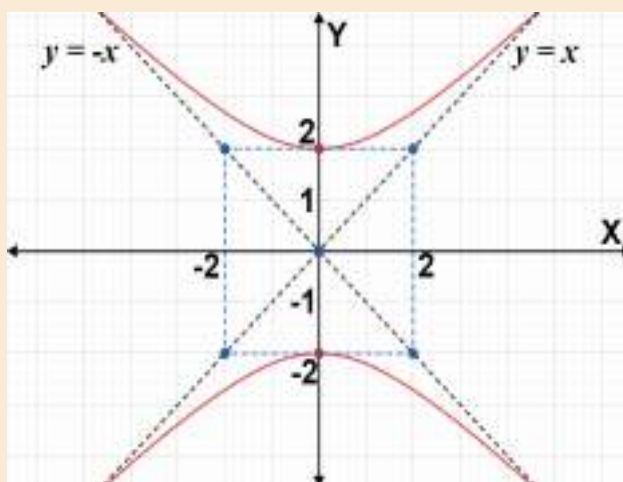
Así que:

$$F_1(2, -3 + 3.6) = F_1(2, 0.6)$$

$$F_2(2, -3 - 3.6) = F_2(2, -6.6)$$

.....

3. Determinar la ecuación de la hipérbola que se muestra en la figura.



Solución:

En la figura observamos que: el eje transversal es vertical, con extremos en los vértices $V_1(0, 2)$ y $V_2(0, -2)$; el centro se ubica en $C(0, 0)$ y los extremos del eje conjugado son: $W_1(2, 0)$ y $W_2(-2, 0)$.

Con base en esta información determinamos que $a = 2$ y $b = 2$. La ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

.....

4. Encontrar las coordenadas del centro, vértices y focos de la hipérbola definida por la ecuación.

$$x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$$

Solución

Procedemos de forma similar a los casos de la circunferencia y la elipse, para agrupar términos y completar trinomios cuadrados perfectos, con especial atención al signo menos que precede al segundo binomio ya que en ese caso equivale a restar una cantidad en ambos lados de la ecuación.

$$(x^2 + 8x) - (3y^2 + 6y) = -4$$

$$(x^2 + 8x) - 3(y^2 + 2y) = -4$$

$$(x^2 + 8x + 16) - 3(y^2 + 2y + 1) = -4 + 16 - 3$$

$$(x + 4)^2 - 3(y + 1)^2 = 9$$

$$\frac{(x + 4)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{3} = 1$$

El centro se ubica en $C(-4, -1)$, $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$ entonces $a = 3$ y $c^2 = 9 + 3 \Rightarrow c = \sqrt{12} \cong 3.46$.

Los vértices se ubican en:

$$V_1(-4 + 3, -1) = V_1(-1, -1)$$

$$V_2(-4 - 3, -1) = V_2(-7, -1)$$

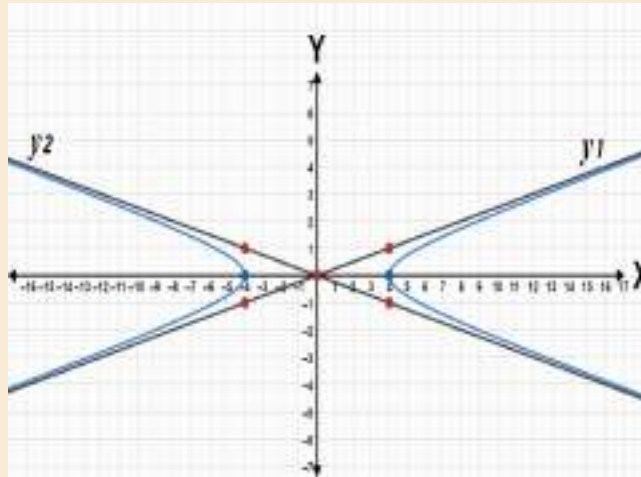
Las coordenadas de los focos son:

$$F_1(-4 + 3.46, -1) = F_1(-0.54, -1)$$

$$F_2(-4 - 3.46, -1) = F_2(-7.46, -1)$$

.....

5. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola que se muestra en la figura.



Solución:

El eje transversal es horizontal, $a = 4$ y $b = 1$. El centro se ubica en el origen.

La recta y_1 pasa por el centro $C(0,0)$ y el punto $P(4,1)$ y su ecuación es de la forma

$$y_1 = mx + b$$

Como $b = 0$ entonces

$$y = mx$$

La pendiente está dada por $m = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}$ así,

$$y_1 = \frac{1}{4}x$$

La recta y_2 también pasa por $C(0,0)$ y por otro punto $Q(-4,1)$, por lo que su ecuación es de la forma

$$y_2 = mx + b$$

con $m = \frac{1-0}{-4-0} = -\frac{1}{4}$ y $b = 0$, por lo que.

$$y_2 = -\frac{1}{4}x$$

.....

7.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Determinar el centro, vértice y focos de la hipérbola correspondiente a la ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$\mathbf{R/} C(-1, -3), V_1(5, -3), V_2(-7, 3), F_1(5.32, -3), F_2(-7.32, -3)$$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola con focos en $F_1(3, 6)$ y $F_2(9, 6)$ y vértice en $V(7, 6)$

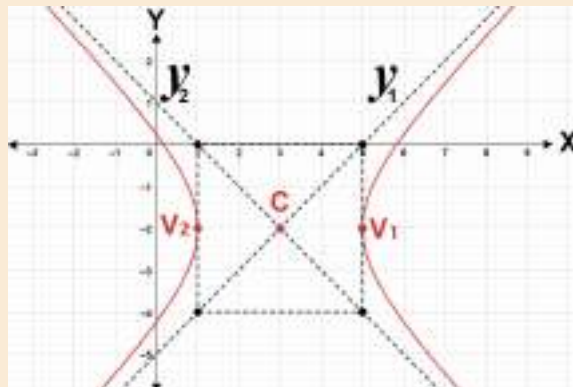
$$\mathbf{R/} (x-6)^2 - \frac{(y-6)^2}{8} = 1$$

3. Determinar las coordenadas del centro, los vértices y los focos de la hipérbola con ecuación general dada por

$$2y^2 - x^2 + 2x + 8y + 3 = 0$$

$$\mathbf{R/} C(1, -2), V_1(1, -3.41), V_2(1, -0.59), F_1(1, 0.45), F_2(-1, -4.45)$$

4. Determinar la ecuación de la hipérbola que se muestra en la figura



$$\mathbf{R/} \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

5. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $W_1(0, 5)$ y $W_2(0, -5)$, la longitud del eje transversal es de 2 unidades. Determinar su ecuación.

$$\mathbf{R/} \ x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$$



Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 20,01.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- J.H. Kindle. Geometría Analítica. McGraw Hill. 1970
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- C. Lehman. Geometría Analítica. U.T.E.H.A. 1978
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.

- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.
- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.