



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería
Fascículo VI: Geometría
Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo VI: Geometría

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Enero de 2022

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Fundamentos de geometría y triángulos	9
2.1	Ejercicios resueltos	15
2.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	22
3	Cuadriláteros	25
3.1	Ejercicios resueltos	28
3.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	35
4	Círculos	37
4.1	Ejercicios resueltos	40
4.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	46
5	Polígonos regulares	49
5.1	Ejercicios resueltos	50
5.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	56
6	Áreas de figuras compuestas	57
6.1	Ejercicios resueltos	57
6.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	64
7	Volumen de sólidos	67
7.1	Ejercicios resueltos	70

7.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	76
	Bibliografía	79



1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

***Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo VI: Geometría***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala



2. Fundamentos de geometría y triángulos

Las formas geométricas son de las partes de la matemática más visibles en la naturaleza, su continua visualización en diferentes contextos evidencia una marcada presencia en manifestaciones de la cultura humana. Desde tempranas edades los niños identifican y diferencian figuras geométricas básicas y desarrollan nociones de forma intuitiva.

Posteriormente, se analizan las propiedades y características esenciales para la clasificación y ordenación. La deducción formal y el vigor para la explicación y demostración corresponden a etapas avanzadas del aprendizaje de la geometría.

Nociones básicas

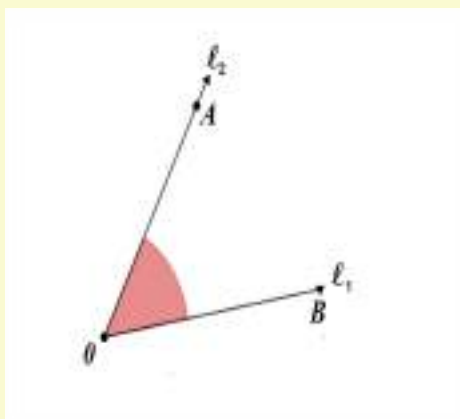
La geometría y su estudio se basa en conceptos difíciles de explicar pero que se conocen y comprenden de forma sencilla, se les conoce como entes no definidos. Estas nociones abarcan, un punto, una recta, un plano y el espacio.

También hay un sistema de afirmaciones que se aceptan sin demostración, que se conocen como postulados; entre ellos destacan los conocidos como Postulados de Euclides. Aunque la redacción puede variar; estos postulados expresan que:

1. A partir de dos puntos cualesquiera es posible trazar un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender continuamente para formar una recta en la misma dirección.
3. Dado un punto y un segmento de recta llamado radio es posible trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos miden lo mismo.
5. Dada una recta y un punto externo es posible trazar una y solo una recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada.

Algunos conceptos básicos que son de mucha utilidad se presentan a continuación:

Ángulo: es la región del plano formada por dos segmentos de recta llamados lados y un punto en común llamado vértice.

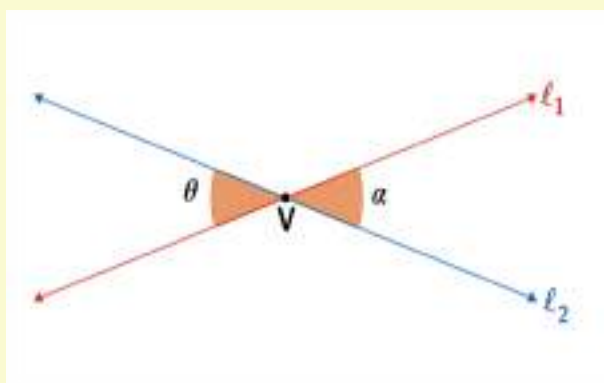


Como notación pueden usarse letras griegas como α , β , θ y otras.

También es común denotarlos por $\angle A$, $\angle B$, etc, o bien, $\angle AOB$; otra forma es numerarlos; $\angle 1$, $\angle 2$ por ejemplo.

Se dice que dos ángulos son **complementarios** si suman 90° y se llaman **suplementarios** si suman 180° . Se llaman **congruentes** si tienen la misma medida.

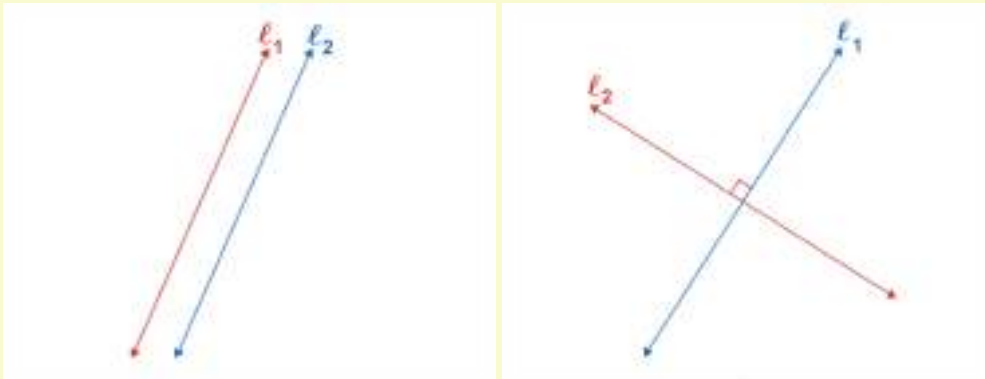
Cuando dos rectas se intersectan, el punto de intersección se convierte en el vértice de ángulos llamados **opuestos por el vértice**, cuya medida es la misma, es decir, son congruentes.



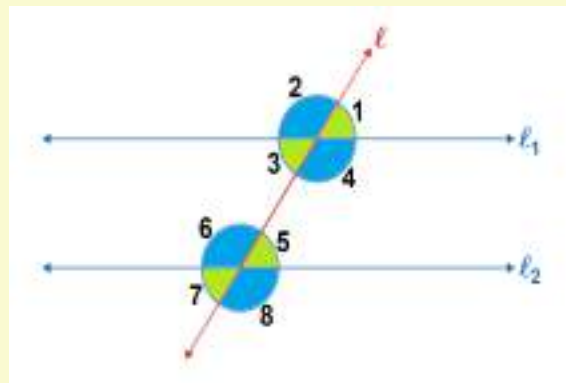
Los ángulos **correspondientes** son aquellos que están en la misma posición.

Otras nociones básicas se relacionan con las líneas rectas, que se llaman **paralelas si no se intersectan**, lo cual se denota por $l_1 \parallel l_2$.

Si dos rectas del plano se intersectan formando un ángulo de 90° , se llaman **perpendiculares** y se denota por $l_1 \perp l_2$. En las siguientes figuras se ilustran estos casos.



En el trabajo para resolver problemas geométricos es de mucha utilidad conocer y aplicar aspectos relacionados con la intersección de dos rectas paralelas por una recta transversal. Una de las posibles relaciones se muestra en la figura.



Se distinguen dos regiones: una entre las rectas paralelas que se llama **interna** y otra región fuera de ellas que se llama **externa**. Se observan al menos cuatro tipos de ángulos: opuestos por el vértice, correspondientes, alternos internos y alternos externos.

Podemos resumir la información así:

- Ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo

$$\angle 1 = \angle 3 \qquad \angle 2 = \angle 4$$

$$\angle 5 = \angle 7 \qquad \angle 6 = \angle 8$$

- Ángulos correspondientes tienen la misma medida.

$$\angle 1 = \angle 5 \qquad \angle 3 = \angle 7$$

$$\angle 2 = \angle 6 \qquad \angle 4 = \angle 8$$

- Ángulos de la región interna en posición alterna

$$\angle 3 = \angle 5 \qquad \angle 4 = \angle 6$$

- Ángulos de la región externa en posición alterna

$$\angle 2 = \angle 8 \qquad \angle 1 = \angle 7$$

Triángulos

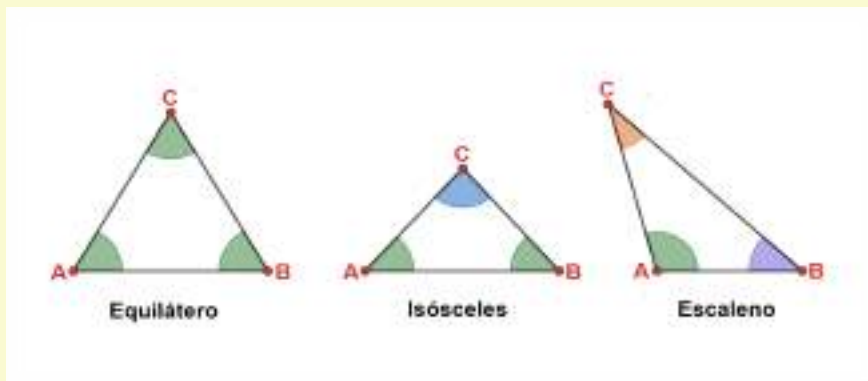
Introducción

Son figuras geométricas planas que se limitan por 3 ángulos y 3 lados, que se generan al trazar segmentos de recta entre tres puntos no colineales. Los extremos de los segmentos se llaman vértices.

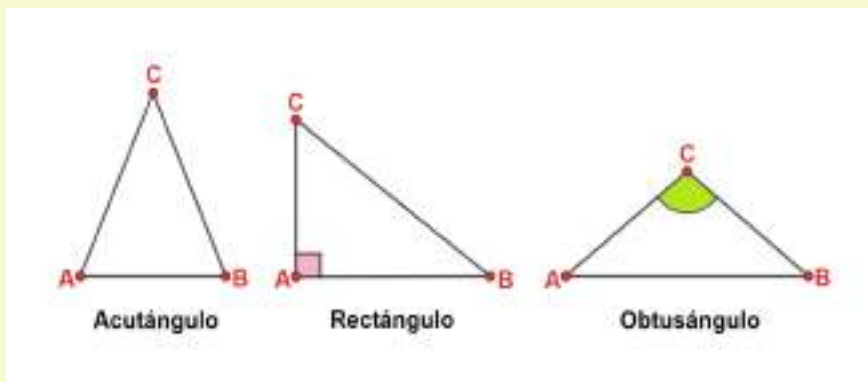
Son la base para la formación de muchas otras figuras y a la vez, muchas figuras pueden descomponerse en triángulos. En la geometría euclidiana, los ángulos internos de cualquier triángulo, suman 180° .

Clasificación de los triángulos

De acuerdo con la medida de sus lados, los triángulos se llaman, equiláteros, si los tres lados miden lo mismo; isósceles, si dos de los lados tienen la misma medida y, escalenos, si los tres lados son de diferente longitud.



De acuerdo con la medida de los ángulos, los triángulos se llaman acutángulos, si sus ángulos son agudos, es decir, miden menos de 90° ; se llaman rectángulos si uno de sus ángulos mide 90° , mientras que si uno de los ángulos es mayor que 90° , el triángulo se llama obtusángulo.

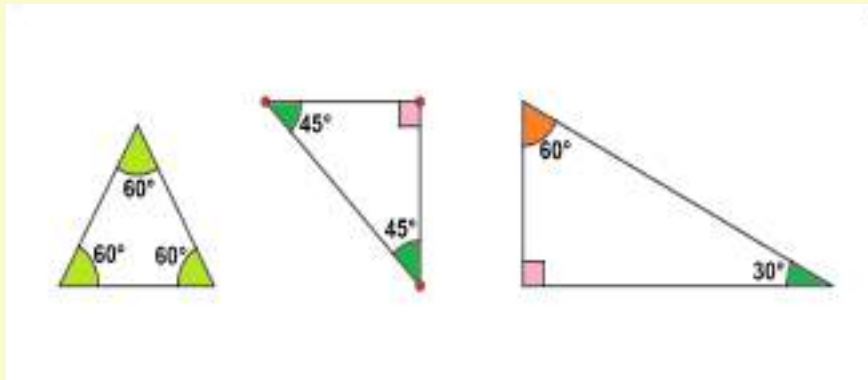


Características especiales

Se considera que el triángulo equilátero “es especial” porque solamente para este caso, los ángulos internos miden lo mismo, es decir, los tres miden 60° .

Otro caso considerado especial, es el triángulo rectángulo isósceles, ya que sus dos ángulos agudos tienen la misma medida: 45° .

En el triángulo rectángulo cuyos ángulos miden 30° y 60° , una característica especial es que la hipotenusa mide el doble de lo que mide el cateto opuesto al ángulo de 30° .



Perímetro y área

El perímetro de un triángulo se encuentra así

$$P = l_1 + l_2 + l_3$$

La expresión más conocida para calcular el área de un triángulo es:

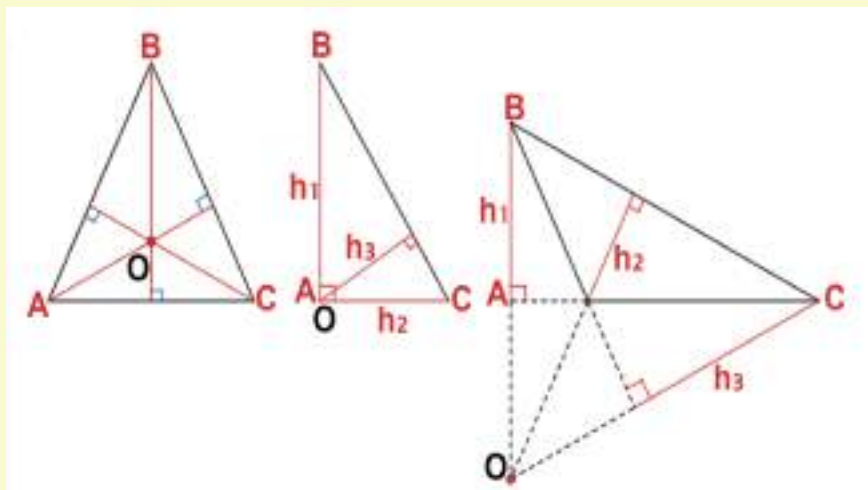
$$A = \frac{1}{2} b h$$

Es muy importante tener presente la siguiente definición.

La altura de un triángulo es un segmento de recta trazado de forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.

Lo anterior significa que un triángulo tiene tres alturas y por lo tanto, cualquiera de sus lados puede ser llamado base.

En la siguiente figura se muestran ejemplos del trazo de las alturas, que se intersectan en un punto llamado **ortocentro**.

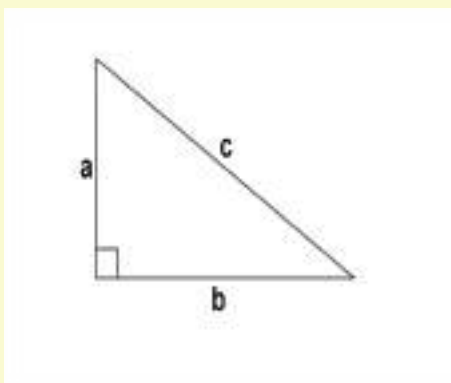


Para el caso del triángulo equilátero las alturas intersectan el lado opuesto en el punto medio, mientras que en el triángulo isósceles esto solo ocurre en el lado de diferente tamaño a los otros dos. Para ambos tipos de triángulos, el ortocentro se ubica en el interior del triángulo, mientras que en un triángulo rectángulo el ortocentro se ubica en un vértice y en el triángulo obtusángulo está fuera del triángulo.

Teorema de Pitágoras

Este teorema es quizás uno de los temas matemáticos más conocidos y útil por su valor formativo y aplicación. Se enuncia así:

Si un triángulo es rectángulo entonces el cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de los catetos.



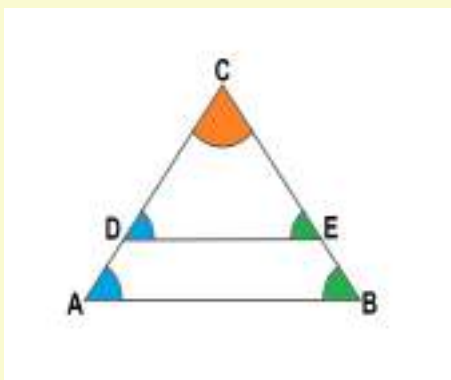
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Semejanza de triángulos

La semejanza es una relación que se aplica para estudiar cualquier polígono, pero de forma particular la estudiaremos para los triángulos.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Una estrategia muy utilizada para generar triángulos semejantes, es trazar un segmento paralelo a cualquiera de los lados; como ejemplo veamos la siguiente figura, en la que en el triángulo se traza una paralela a AB .



Podemos observar que: el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEC$ comparten el ángulo en C . Además $DE \parallel AB$ por lo que $\angle D = \angle A$ y $\angle E = \angle B$, por ser ángulos correspondientes. Esto permite afirmar que los triángulos son semejantes. Con esto es posible plantear las relaciones de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$$

Estas razones pueden plantearse también así:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$$

También se pueden establecer relaciones con las alturas $\frac{h_1}{h_2}$. La idea central es plantear una igualdad de las razones y resolver una regla de tres simple directa para determinar magnitudes desconocidas.
.....

2.1 Ejercicios resueltos

1. Determinar el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 6 centímetros.

Solución:

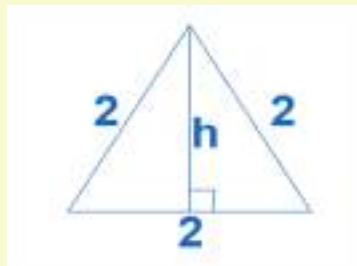
Como el triángulo es equilátero, $P = 3l$, por lo que:

$$6 = 3l$$

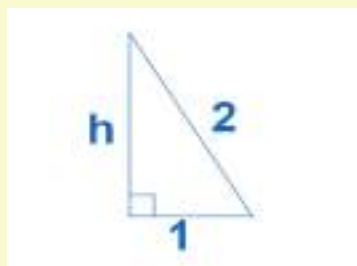
$$2 = l$$

Para calcular el área tenemos que $A = \frac{1}{2}bh$, con $b = 2$, pero h desconocida.

En la figura se muestra un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 cm, en el que trazamos la altura.



Observamos que se forman triángulos rectángulos como el que se muestra.



Para calcular el valor de h aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h^2 = 4 - 1$$

$$h = \sqrt{3}$$

Sustituimos los valores de b y h y calculamos el área

$$A = \frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$$

$$A = \sqrt{3} \cong 1.73$$

Respuesta:

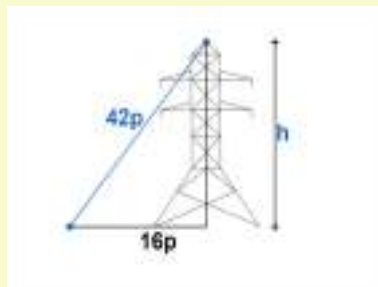
El área del triángulo es 1.73 cm^2 .

.....

2. Desde lo alto de una torre se tiende un cable de 42 pies que se sujeta a 16 pies de su base. Determinar la altura de la torre.

Solución:

En la figura se ilustra la situación planteada. La torre es vertical por lo que se asume que es perpendicular al suelo. Así, se forma un triángulo rectángulo cuyo cateto vertical corresponde a la altura de la torre.



Aplicamos el teorema de Pitágoras y expresamos

$$h^2 + 16^2 = 42^2$$

$$h^2 = 42^2 - 16^2$$

$$h = \sqrt{1764 - 256}$$

$$h = 38.8$$

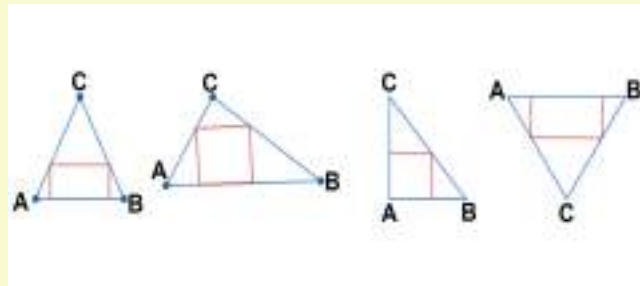
Respuesta:

La altura de la torre es de 38.8 pies.

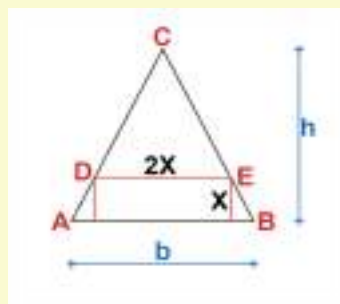
3. En un triángulo de base b y altura h se inscribe un rectángulo cuya base coincide con la base del triángulo. Si la altura x del rectángulo es la mitad de su base, determinar una expresión para el área del rectángulo en términos de la base y la altura del triángulo.

Solución:

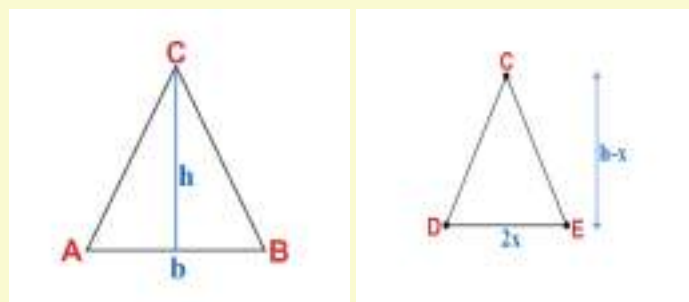
Este ejercicio ofrece muchas opciones para representar la relación indicada, pues no se incluye información sobre características particulares del triángulo, algunas de ellas son:



Trabajaremos con el primero



Observamos que se han formado dos triángulos, $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle CDE$, pues compraten el $\angle C$, $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$, ya que el segmento AB es paralelo al segmento DE .



Por lo que es posible expresar:

$$\frac{b}{2x} = \frac{h}{h-x}$$

Despejamos x y obtenemos:

$$bh - bx = 2hx$$

$$bh = 2hx + bx$$

$$bh = x(2h + b)$$

Donde:

$$\frac{bh}{2h + b} = x$$

Para el rectángulo, el área está dada por

$$A = 2x^2$$

$$A = 2 \left(\frac{bh}{2h + b} \right)^2$$

$$A = \frac{2b^2h^2}{(2h + b)^2}$$

Respuesta:

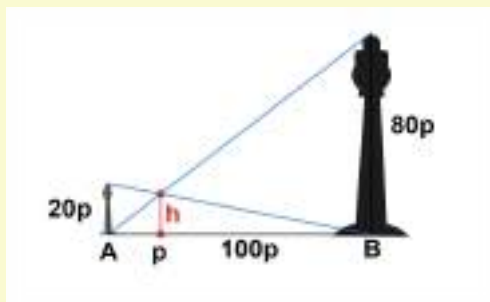
El área del rectángulo está dada por $A = \frac{2b^2h^2}{(2h + b)^2}$

.....

4. Dos postes A y B de alturas 20 pies y 80 pies, están separados una distancia de 100 pies. Desde el punto más alto de cada uno se tiende un cable a la base del otro. Determinar la altura de la intersección de los cables.

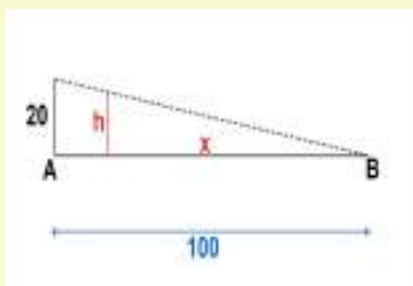
Solución:

Iniciamos por representar en una figura la situación descrita.

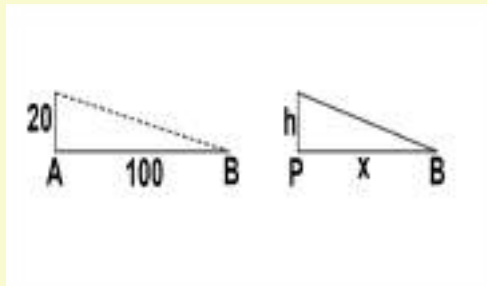


Denotamos por h la altura del punto de intersección, x la distancia del poste más alto al punto de proyección sobre el suelo, de la intersección a los cables.

Analizamos la figura construyendo triángulos a partir del poste pequeño y luego replicamos para el grande.



El segmento h es paralelo al poste A , por lo que se forman dos triángulos semejantes pues ambos son rectángulos y comparten el ángulo en B .

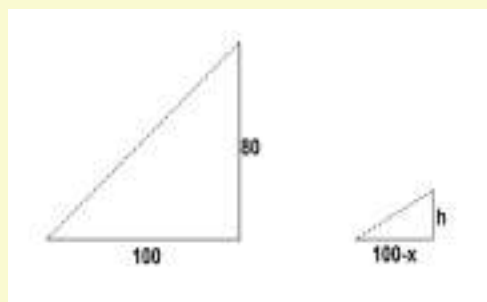
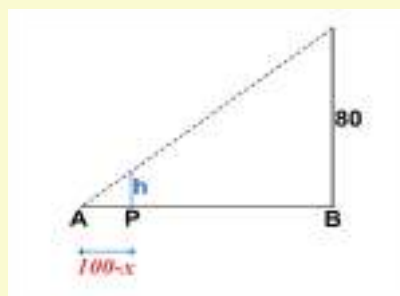


Establecemos relaciones entre los lados correspondientes

$$\frac{20}{h} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100h}{20} = 5h$$

Ahora procedemos con el análisis para el poste más alto y formamos dos triángulos semejantes en los que expresamos la proporcionalidad entre sus lados correspondientes.



$$\frac{80}{h} = \frac{100}{100-x}$$

$$\frac{80}{h} = \frac{100}{100-5h}$$

$$80(100-5h) = 100h$$

$$8000 - 400h = 100h$$

$$8000 = 500h$$

$$\frac{8000}{500} = h$$

$$16 = h$$

Respuesta:

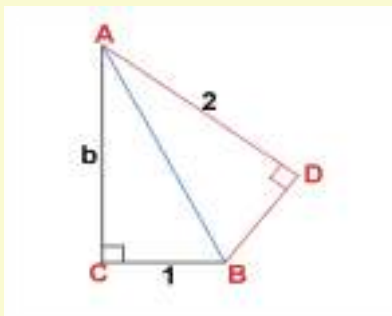
Los cables se intersectan a una altura de 16 pies.

.....

5. Sobre la hipotenusa AB de un triángulo ABC se construye otro triángulo rectángulo ABD que también tiene como hipotenusa AB . Si $BC = 1$, $AC = b$ y $AD = 2$, determinar una expresión para calcular la distancia de B a D .

Solución:

Para construir una figura que permita visualizar la situación planteada, analizamos que la hipotenusa tiene extremos en los vértices A y B y el primer triángulo es rectángulo en el vértice C , mientras que el otro tendrá un ángulo recto en otro punto D .



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC y obtenemos:

$$(AB)^2 = b^2 + 1$$

De forma similar, en el triángulo ABD , obtenemos

$$(AB)^2 = (BD)^2 + 4$$

Como la hipotenusa es la misma, igualamos las expresiones obtenidas y despejamos BD

$$b^2 + 1 = (BD)^2 + 4$$

$$b^2 - 3 = (BD)^2$$

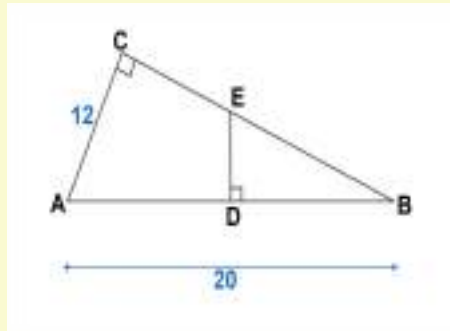
Por lo que, la longitud del segmento BD se puede calcular por medio de la expresión

$$BD = \sqrt{b^2 - 3}$$

Respuesta:

La distancia de B a D está dada por la expresión $BD = \sqrt{b^2 - 3}$.

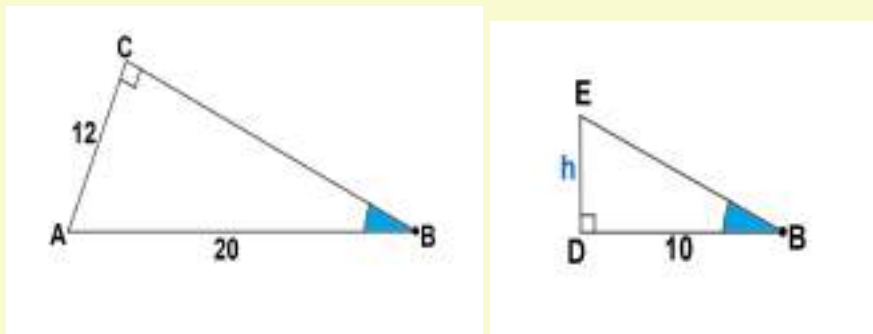
6. En la figura mostrada el $\triangle ABC$ es rectángulo en C , $AD = DB$, $DE \perp AB$, $AB = 20$ y $AC = 12$. Determinar el área del triángulo DBE y el área del triángulo AEC .



Solución:

Dado que $AD = DB$ y el segmento AB mide 20, establecemos que $DB = 10$.

Para calcular el área del triángulo DBE es necesario determinar la longitud de ED , que puede considerarse una altura. Para ello comparamos $\triangle ABC$ con $\triangle DBE$.



Los triángulos son semejantes porque comparten el ángulo en B y tienen un ángulo recto, por lo que

$$\frac{BC}{10} = \frac{12}{h}$$

$$h = \frac{10 \cdot 12}{BC}$$

Para calcular la longitud del lado BC aplicamos el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABC$

$$12^2 + (BC)^2 = 20^2$$

$$(BC)^2 = 400 - 144$$

$$BC = \sqrt{256} = 16$$

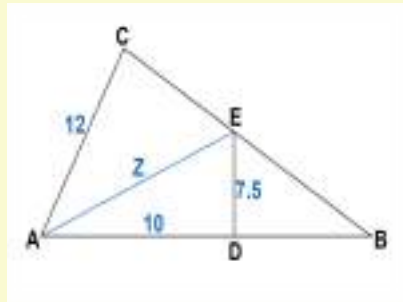
Ahora calculamos h sustituyendo el valor de BC

$$h = \frac{120}{16} = 7.5$$

El área del triángulo DBE se puede calcular así:

$$A = \frac{1}{2}(10)(7.5) = 37.5 \text{ u}^2$$

Para calcular el área del triángulo ACE , trazamos un segmento de A a E que será la hipotenusa de este triángulo y también del triángulo ADE .



Es necesario determinar la longitud del segmento CE para calcular el área del $\triangle ACE$, como

$$A = \frac{1}{2}(12)(CE)$$

Como estrategia, aplicamos el Teorema de Pitágoras en $\triangle ADE$ para calcular la hipotenusa z ; luego calculamos el valor de CE aplicando nuevamente el mismo teorema.

En $\triangle ADE$:

$$10^2 + 7.5^2 = z^2$$

$$156.25 = z^2$$

En $\triangle ACE$

$$z^2 = 12^2 + (CE)^2, \text{ entonces } CE = \sqrt{156.25 - 144} = 3.5$$

Por lo que:

$$A = \frac{1}{2}(12)(3.5) = 21u^2$$

Respuesta:

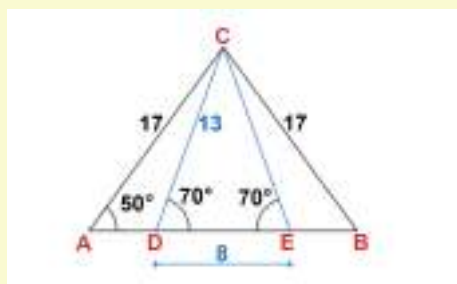
El área del triángulo ACE es de 21 unidades cuadradas.

.....

2.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

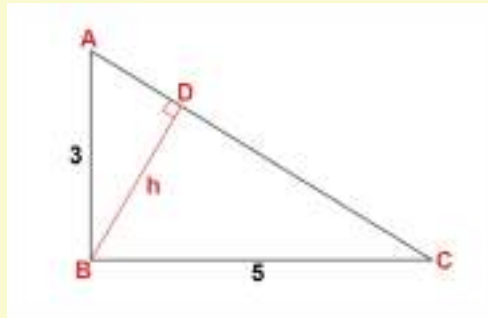
1. En la figura que se muestra determinar:

- $\angle ABC$
- $\angle ACD$
- La longitud de AB
- El área del $\triangle DEC$



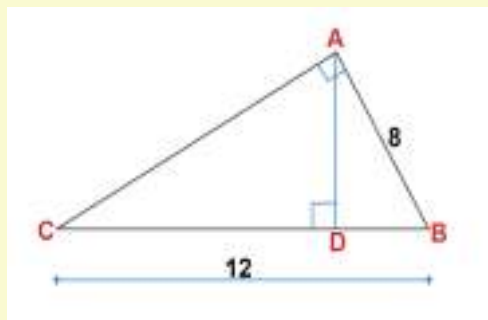
R/ a) 50° , **b)** 20° , **c)** $AB = 23.32$ unidades, **d)** $A = 49.48 u^2$

2. En la figura que se muestra se ha trazado la altura sobre la hipotenusa. Determinar:
- El área de $\triangle BCD$
 - La longitud de AD



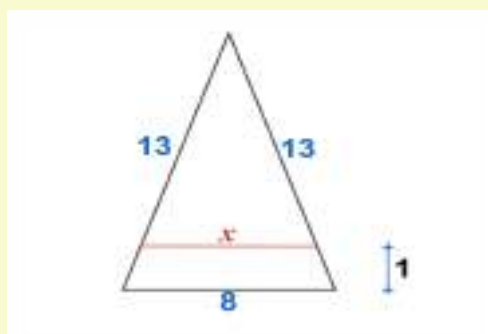
R/ a) $5.51u^2$, b) $AD = 1.54$

3. Con base en la figura que se muestra, determinar el perímetro del triángulo con vértices en A, B y C.



R/ El perímetro del triángulo es 19.3 unidades.

4. Determinar el valor de x con base en la figura.



R/ El valor de x es 7.35 unidades.

5. Un automovilista viaja en una carretera recta hacia el sur a una velocidad constante de 60 km/h; al mismo tiempo otro automovilista sale del mismo punto a una velocidad de 45 km/h y se mueve en una carretera recta hacia el oeste. Determinar a qué distancia se encuentran uno del otro los viajeros después de 1.5 horas.

R/ Se encuentran a 112.5 km

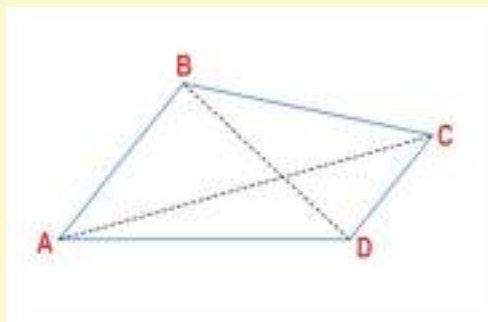
6. Un árbol de 6.5m de altura proyecta una sombra de 9 metros de longitud. Determinar la longitud de la sombra que proyecta un hombre de 1.78 de altura que se encuentra a cierta distancia del árbol.

R/ La sombra proyectada por el hombre es de 2.46 m.

3. Cuadriláteros

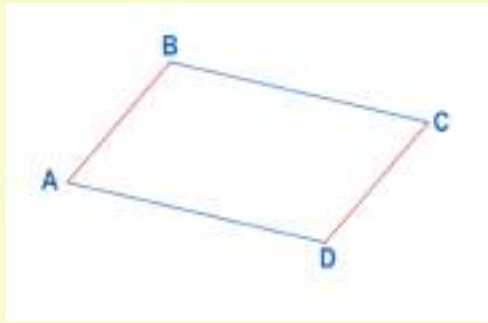
Una figura plana de cuatro lados rectos, se llama cuadrilátero, en el mundo real se encuentran muchos de ellos en diversos tamaños y formas que los diferencia, tales como: rectángulos, cuadrados, rombos, trapecios y en general paralelogramos.

Los puntos de intersección de dos lados se llaman **vértices** y los lados que no tienen vértices comunes se llaman **opuestos**. En la figura, A , B , C y D son los vértices, los lados AB y CD son opuestos, al igual que BC y AD .

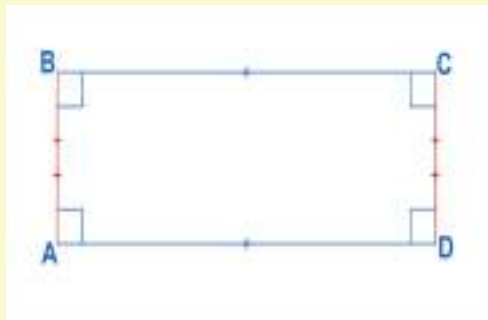


Se llaman ángulos adyacentes a los que tienen un lado en común, en la figura anterior $\angle B$ y $\angle C$ son adyacentes, así como $\angle C$ y $\angle D$, $\angle A$ y $\angle D$. Las diagonales son segmentos de recta que se trazan entre vértices **no** adyacentes.

Se define un **paralelogramo** como un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, como un ejemplo ver la figura siguiente.

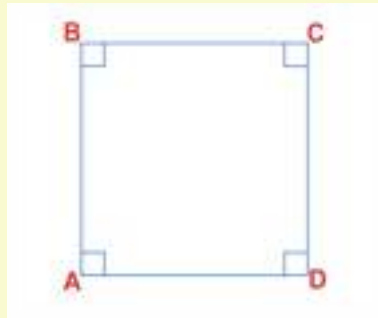


Un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.

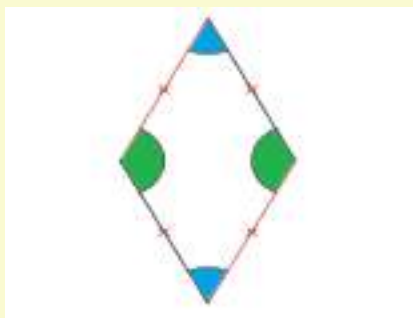


$AB \parallel CD$ y $BC \parallel AD$, además $BC \perp CD$, $CD \perp AD$, $AD \perp AB$, $AB \perp BC$. Otra característica de los rectángulos es que los lados paralelos son congruentes, es decir, miden lo mismo.

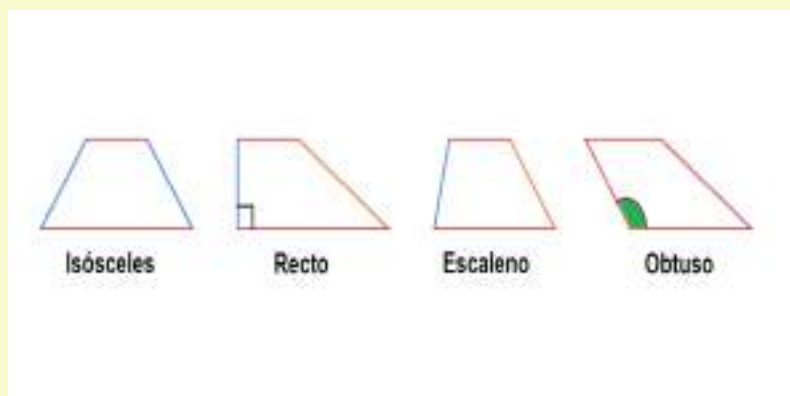
Un cuadrado es un rectángulo con cuatro lados de la misma medida, es decir, tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.



Un rombo es un paralelogramo con cuatro lados de la misma medida y dos pares de ángulos opuestos congruentes.

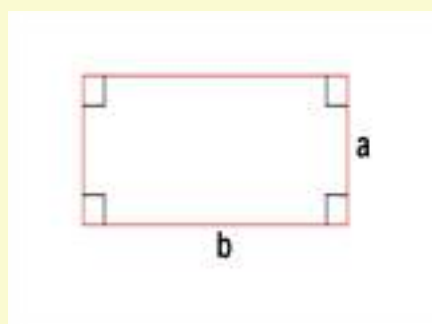


Los trapecios son cuadriláteros con dos de sus lados paralelos, a los cuales se llama bases. En la figura se muestran diferentes trapecios, aunque el primero y el segundo son los que más se utilizan.



Áreas y perímetros de cuadriláteros

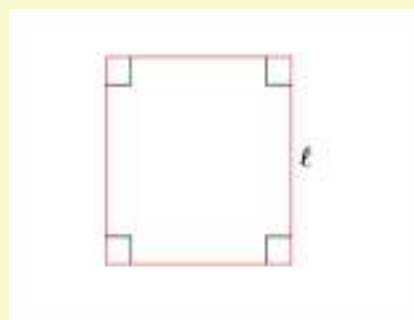
Rectángulo



$$P = 2a + 2b$$

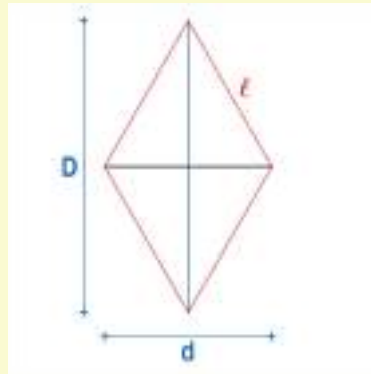
$$A = ab$$

Cuadrado



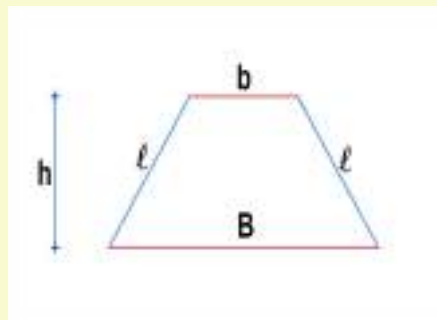
$$P = 4l$$

$$A = l^2$$

Rombo

$$P = 4l$$

$$A = \frac{D * d}{2}$$

Trapecio

$$P = 2l + b + B$$

$$A = \frac{(b + B)h}{2}$$

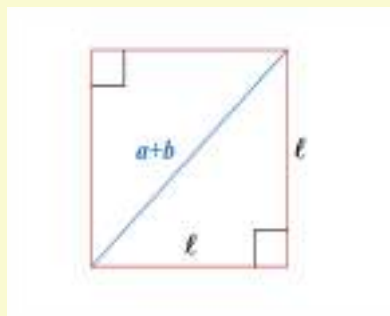
.....

3.1 Ejercicios resueltos

1. Si la longitud de la diagonal de un cuadrado es $a + b$, determinar una expresión para calcular el área del cuadrado en términos de su diagonal.

Solución:

En la figura se muestra un cuadrado de lado l y diagonal $a + b$



El área del cuadrado está dada por: $A = l^2$, al trazar la diagonal se formó un triángulo rectángulo isósceles, por lo que

$$l^2 + l^2 = (a+b)^2$$

$$2l^2 = (a+b)^2$$

$$l^2 = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Por lo que

$$A = \frac{(a+b)^2}{2}$$

Respuesta:

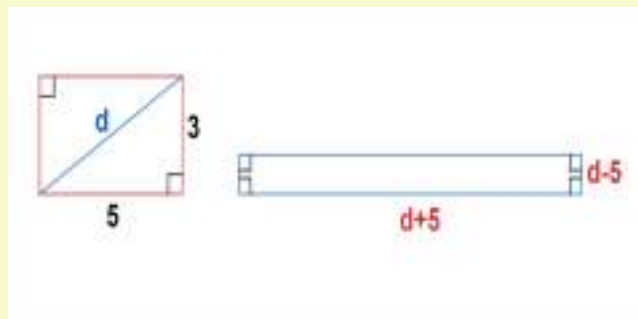
La expresión para el área en términos de a y b es $A = \frac{(a+b)^2}{2}$

.....

2. Se construye un rectángulo a partir de uno cuyos lados miden 5 cm y 3cm, de tal forma que la base del nuevo rectángulo es igual a la suma de la diagonal y el lado mayor, mientras que la altura es la diferencia entre la diagonal y el lado mayor. Determinar el área del nuevo rectángulo.

Solución:

En la figura se muestra el rectángulo dado y el nuevo rectángulo.



Las medidas del nuevo rectángulo son:

Base: $d + 5$

Altura: $d - 5$

El área del nuevo rectángulo es

$$A = bh$$

$$A = (d + 5)(d - 5)$$

$$A = d^2 - 25$$

Necesitamos calcular d^2 , para ello notamos que al trazar la diagonal se generó un triángulo rectángulo con catetos 3 y 5:

$$d^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9$$

Sustituimos d^2 y obtenemos el valor del área buscada

$$A = 25 + 9 - 25$$

$$A = 9 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área buscada es de 9 cm^2 .

.....

3. Un terreno de forma trapezoidal tiene un área de 1400 m^2 . Si la altura es de 50 metros, determinar los posibles valores enteros de las bases, sabiendo que ambos son múltiplos de 8.

Solución:

Si las bases del trapecio b y B son múltiplos de 8, entonces son de la forma:

$$b = 8x \quad \text{y} \quad B = 8y$$

Sabemos que $A = 1400$ y $h = 50$, aplicamos la expresión para el área de un trapecio.

$$A = \frac{(b+B)h}{2}$$

$$1400 = \frac{(8x+8y)50}{2}$$

$$1400 = \frac{8(x+y)50}{2}$$

$$x+y = \frac{2800}{8 \cdot 50}$$

$$x+y = 7$$

Valores enteros posibles de x y y .

x	1	2	3
y	6	5	4

Valores enteros posibles de las bases

b	8	16	24
B	48	40	32

Respuesta:

Los posibles valores de las bases son: 8 y 48, 16 y 40 o 24 y 32

4. Un triángulo equilátero y un trapecio isósceles tienen áreas y alturas iguales. Si el lado del triángulo mide 18 cm y las longitudes de las bases del trapecio difieren en 8 cm, determinar el perímetro del trapecio.

Solución:

El perímetro de un trapecio está dado por $P = B + b + 2l$.

El área de un triángulo se expresa como $A_{Tri} = \frac{1}{2}bh$ con $b = 18$

$$A_{Tri} = 9h$$

El área del trapecio corresponde a

$$A_{Tra} = \frac{1}{2}(B + b)h$$

Sabemos que las áreas y alturas son iguales

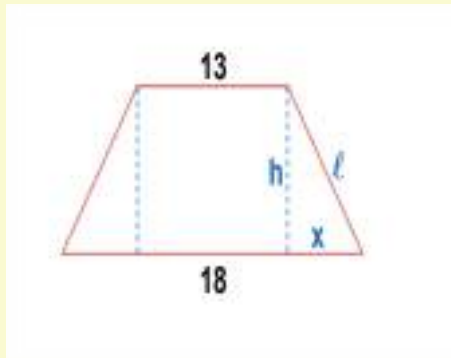
$$A_{Tri} = A_{Tra}$$

$$9h = \frac{1}{2}(B + b)h$$

$$18 = B + b$$

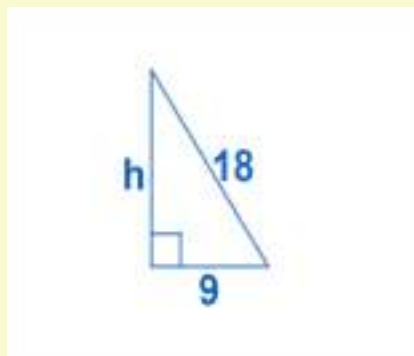
Además el enunciado indica que $B - b = 8$.

Para calcular el perímetro hace falta determinar la medida del lado del trapecio.



$$x = \frac{B - b}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

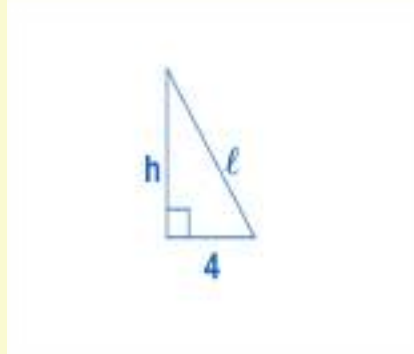
$h_{Tra} = h_{Tri}$, por lo que calculamos la altura del triángulo equilátero y luego el lado del trapecio.



$$h^2 = 18^2 - 9^2$$

$$h^2 = 243$$

Ahora trabajamos en el triángulo rectángulo generado en el trapecio.



$$l^2 = h^2 + 4^2$$

$$l = \sqrt{243 + 16} = 16.09$$

$$P_{Tra} = 18 + 2(16.09) = 50.18$$

Respuesta:

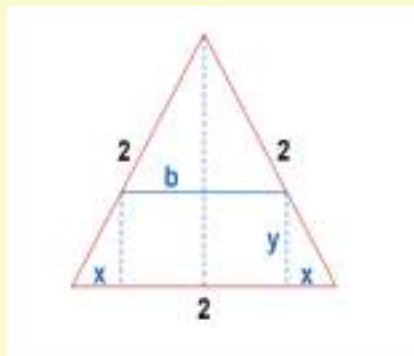
El perímetro del trapecio es de 50.18 centímetros.

.....

5. Un triángulo equilátero de lado 2 se divide en un triángulo y un trapecio isósceles al trazar una paralela a uno de los lados. Si el área del trapecio es la mitad del área del triángulo original, determinar cuánto mide la base menor del trapecio.

Solución:

En la figura se muestra la situación descrita



Trazamos la altura del triángulo original y la calculamos aplicando el Teorema de Pitágoras.

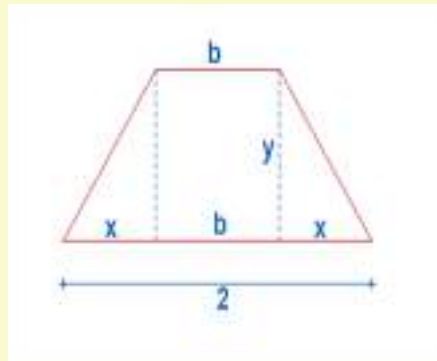
$$h^2 = 2^2 - 1^2$$

$$h = \sqrt{3}$$

El área del triángulo es $A_{Tri} = \frac{1}{2}(2)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Así determinamos el área del trapecio $A_{Tra} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

el trapecio formado se muestra en la siguiente figura



$$B = 2 \quad b = 2 - 2x$$

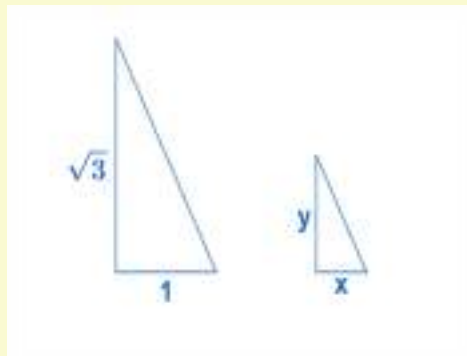
Igualamos el valor del área con la expresión para calcularla

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(B+b)}{2}h$$

$$\sqrt{3} = (2 + 2 - 2x)y$$

$$\sqrt{3} = (4 - 2x)y$$

Necesitamos establecer relación entre y y x , por lo que aplicamos semejanza de triángulos.



$$\frac{\sqrt{3}}{y} = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{3}x$$

Entonces, al sustituir obtenemos:

$$\sqrt{3} = (4 - 2x)\sqrt{3}x$$

$$1 = 4x - 2x^2$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática y determinamos el valor de X

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$x_1 = 3.41 \quad y \quad x_2 = 0.59$$

Como la base debe ser menor que 2, elegimos $x_2 = 0.59$

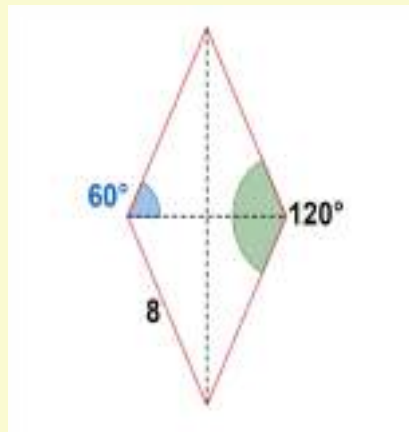
$$b = 2 - 2(0.59) = 0.82$$

Respuesta:

La base menor del trapecio mide 0.82 unidades.

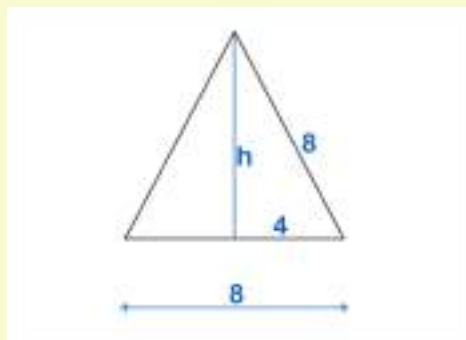
.....

6. Determinar el área del rombo que se muestra en la figura.



Solución:

Para calcular el área del rombo se requiere determinar el valor de las diagonales. El ángulo opuesto al ángulo dado también mide 120° ; la diagonal de un rombo divide sus ángulos en ángulos de la misma medida, es decir, en dos de 60° , así determinamos que los ángulos del vértice superior y del vértice inferior miden 60° . Se forman dos triángulos equiláteros cuya altura es la mitad de la diagonal mayor y la base es la diagonal menor.



$$h^2 = 8^2 - 4^2$$

Por lo que $h = \sqrt{64 - 16} \cong 6.93$

$$D = 2(6.93) = 13.86$$

$$d = 8$$

$$A = \frac{D * d}{2} = \frac{13.86 * 8}{2}$$

$$A = 55.44; u^2$$

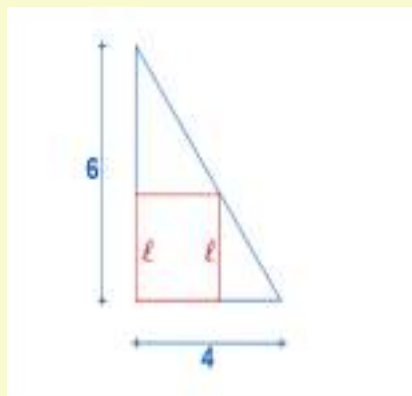
Respuesta:

El área del rombo es de 55.44 unidades cuadradas.

.....

3.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Un cuadrado se inscribe en un triángulo rectángulo de catetos de 4 cm y 6 cm. Determinar el área dentro del triángulo y fuera del cuadrado.



R/ El área es 6.24 cm^2

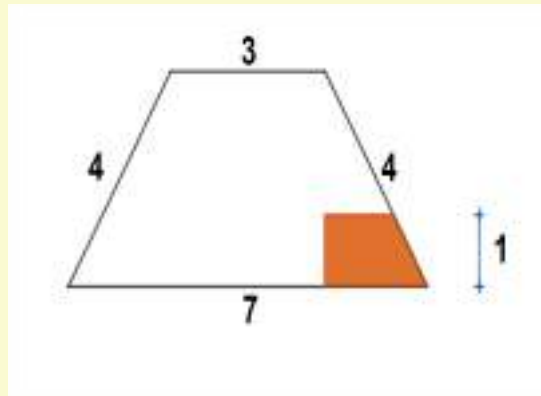
2. La base de un triángulo mide el doble que el lado de un cuadrado de igual área. Determinar la razón entre el lado del cuadrado y la altura del triángulo.

R/ La razón es de 1

3. La base mayor de un trapecio isósceles es igual a una diagonal y la base menor mide lo mismo que la altura. Determinar el perímetro del trapecio si las bases miden 5cm y 3cm.

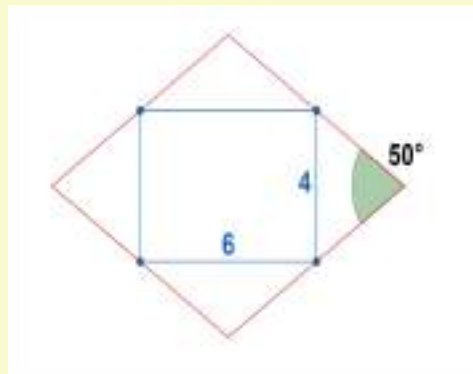
R/ El perímetro es de 14.32 cm

4. Calcular el área sombreada en la siguiente figura, con $b = h$



R/ El área es $\frac{5}{3}u^2$

5. En un rombo cuyos ángulos agudos miden 50° , se inscribe un rectángulo con vértices en los puntos medios de los lados cuya longitud es de 8cm. Determinar el área fuera del rectángulo y dentro del rombo.



R/ El área es de 36.54 cm^2

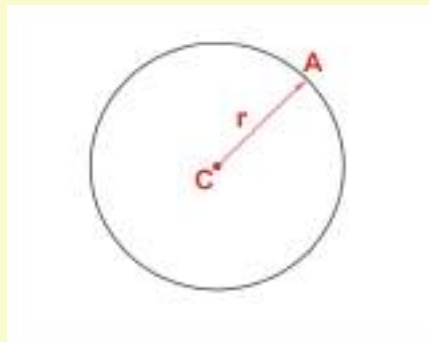
6. En un rectángulo de lado 7.8 cm y 4.53 se inscribe un rombo con sus vértices en los puntos medios del rectángulo. Determinar el área del rombo y la medida de sus lados.

R/ El área es de 17.67 cm^2 y el lado mide 4.51 cm

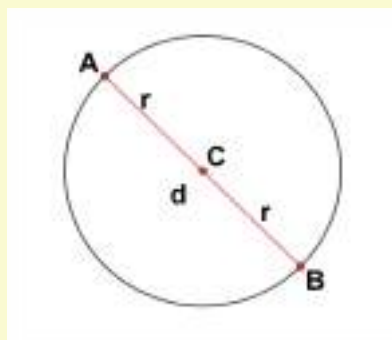
4. Círculos

El círculo es conocido como forma circular o forma redonda. Se refiere a una figura plana limitada por el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

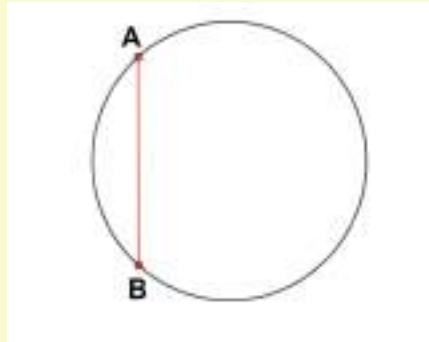
El contorno, borde, orilla o perímetro del círculo es la circunferencia. El segmento de recta que tiene como extremos al centro y un punto de la circunferencia, se llama **radio**.



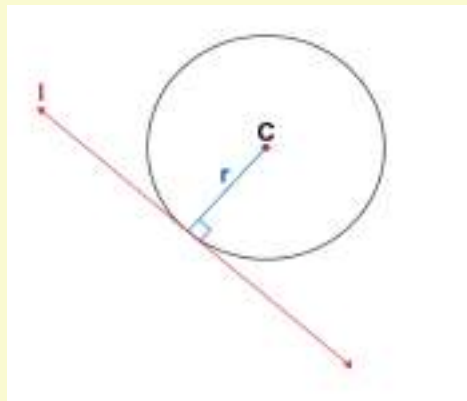
El segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro se llama **diámetro**. En la siguiente figura podemos observar que $d = 2r$



En general, un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia se llama **cuerda**.

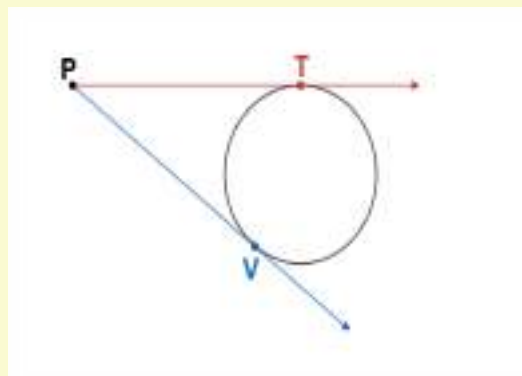


Una recta se llama tangente si intersecta el círculo en un punto, en el cual la tangente y el radio son perpendiculares.

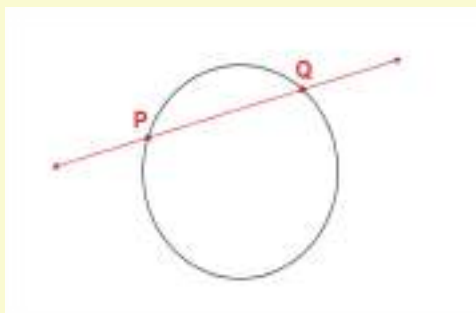


Un teorema de mucha utilidad es el que se enuncia a continuación.

Si desde un punto externo P se trazan tangentes a un círculo, la distancia desde P a los puntos de tangencia T y V , es la misma: $d(P,T) = d(P,V)$

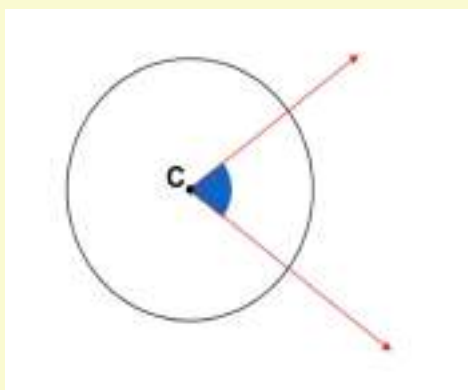


Una recta **secante** a un círculo es la que intersecta la circunferencia en dos puntos, o sea, contiene una cuerda.

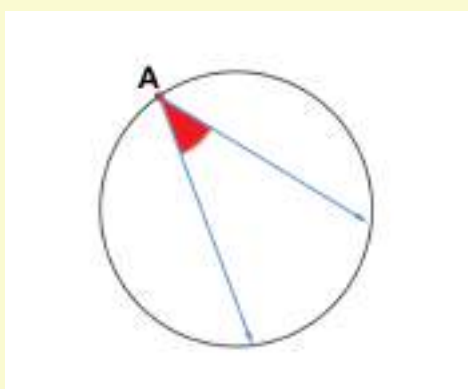


Ángulos y arcos

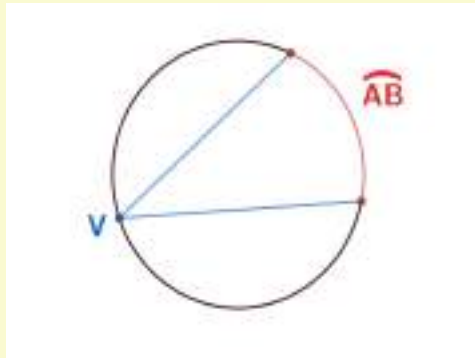
Un ángulo **central** es aquel que tiene su vértice en el centro del círculo, es decir, sus lados son dos radios o segmentos que contienen a dos radios.



Un ángulo **inscrito** es aquel cuyo vértice se ubica en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas o dos segmentos que las contienen.



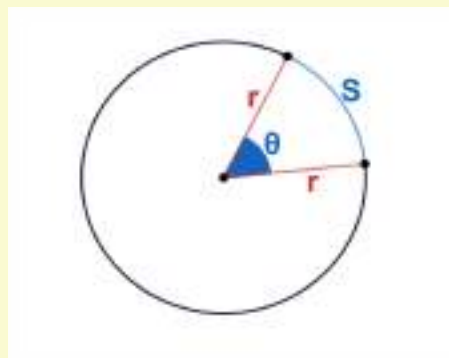
Se llama arco de A a B y se denota $\widehat{AB}$, a la porción de la circunferencia entre el punto A y el punto B .



La medida de un ángulo inscrito corresponde a la mitad del arco que subtiende. En la figura anterior

$$\angle V = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

Un sector circular es una parte del círculo limitada por dos radios y un arco, con θ ángulo central.



El área de un sector circular se calcula por medio de la expresión $A = \frac{r^2 \theta}{2}$, θ en radianes.

La longitud del arco está denotada por s , se calcula así: $s = r\theta$, θ en radianes.

El área de un círculo está dada por $A = \pi r^2$ y su perímetro por $C = 2\pi r$.

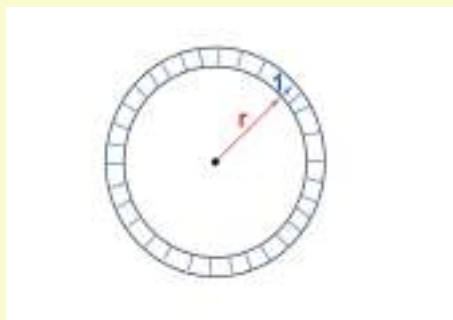
.....

4.1 Ejercicios resueltos

1. El área encerrada entre dos círculos concéntricos; en una región llamada anillo circular, mide 10π unidades cuadradas. Si la diferencia entre los radios es de 1 unidad, determinar la medida de los radios.

Solución:

En la figura se muestran dos círculos con el mismo centro, es decir, concéntricos, así como el anillo circular formado.



El ejercicio puede resolverse expresando el radio mayor como $r_2 = r_1 + 1$ el radio menor como $r_1 = r_2 - 1$. Notamos que el área del anillo circular corresponde al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A_2 - A_1 = 10\pi$$

$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = 10\pi$$

Al dividir por π y sustituir $r_2 = r_1 + 1$, tenemos

$$(r_1 + 1)^2 - r_1^2 = 10$$

$$r_1^2 + 2r_1 + 1 - r_1^2 = 10$$

$$2r_1 = 9$$

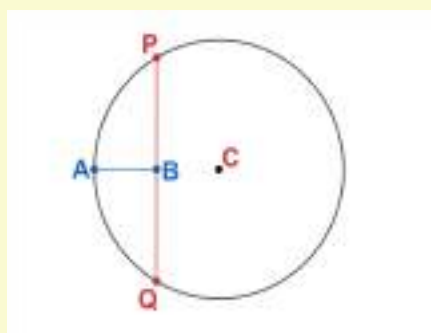
$$r_1 = 4.5$$

Respuesta:

Los radios de los círculos miden: $r_1 = 4.5$ y $r_2 = 5.5$.

.....

2. En la figura que se muestra, PQ es una cuerda de 12 cm. $AB \perp PQ$, A , B y C son colineales y $AB = 2$ cm. Determinar la longitud del radio.



Solución:

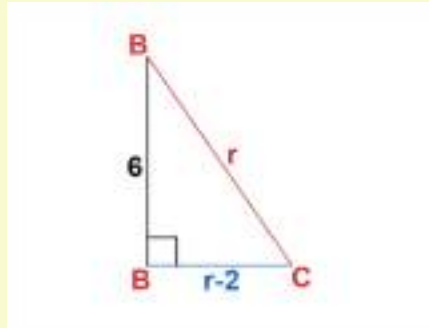
Como A , B y C son colineales, B , es el punto medio de la cuerda PQ . Trazamos un radio de C a P y otro radio de C al punto A . Notamos que:

$$r = AB + BC$$

$$r = 2 + BC$$

$$r - 2 = BC$$

Formamos el triángulo rectángulo que se muestra.



Aplicamos el Teorema de Pitágoras y obtenemos el valor de r

$$r^2 = 36 + (r - 2)^2$$

$$r^2 = 36 + r^2 - 4r + 4$$

$$4r = 40$$

$$r = 10$$

Respuesta:

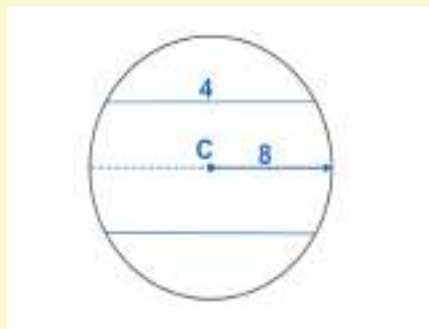
El radio del círculo mide 10 cm.

.....

3. En un jardín circular de 8m de radio se separa el área de caminamiento por medio de dos cuerdas paralelas a 4m del centro cada una. Determinar el área para el caminamiento y el área para cultivo de plantas.

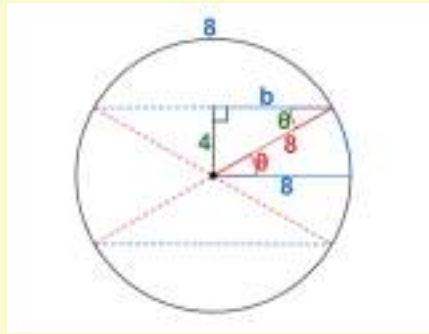
Solución:

Empezamos por representar la situación planteada en la siguiente figura



Notamos que el área de caminamiento se divide en 4 regiones de igual magnitud, de tal forma que al multiplicar por 4 cada área, obtenemos el área buscada.

Cada una de las cuatro regiones está formada por un triángulo rectángulo y un sector circular.



Para calcular el área del triángulo rectángulo aplicamos el Teorema de Pitágoras para determinar b .

$$b = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6.93$$

el área del triángulo es:

$$A_T = \frac{1}{2}(6.93)(4) = 13.86 m^2$$

El ángulo $\theta = 30^\circ$ ya que en el triángulo, la hipotenusa mide el doble que el lado opuesto a θ ; además este es alterno interno con el ángulo del sector circular

$$A_{SC} = \frac{8^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} = 5.33\pi$$

El área de caminamiento es:

$$A_C = 4(5.33\pi) \cong 66.98 m^2$$

El área de jardín es:

$$A_J = \pi(8^2) - 66.98 = 134.1 m^2$$

Respuesta:

El área de caminamiento es de $66.98 m^2$ y el área de jardín es de $134.1 m^2$.

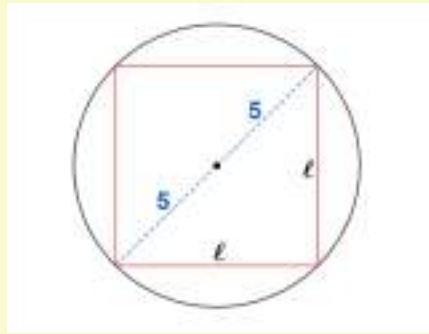
.....

4. Determinar la razón entre el área de un cuadrado inscrito en un círculo de radio de 5, y un cuadrado inscrito en un semicírculo del mismo radio.

Solución:

Se denota el área del cuadrado inscrito en un círculo de radio 5, como A_1 ; el área del cuadrado inscrito en el semicírculo del mismo radio se denota como A_2 . Se requiere determinar la razón $\frac{A_1}{A_2}$.

En las figuras siguientes se presentan los cuadrados inscritos en el círculo y el semicírculo.



$$A_1 = l^2$$

Al trazar un diámetro desde los vértices opuestos del cuadrado se genera un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 10. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

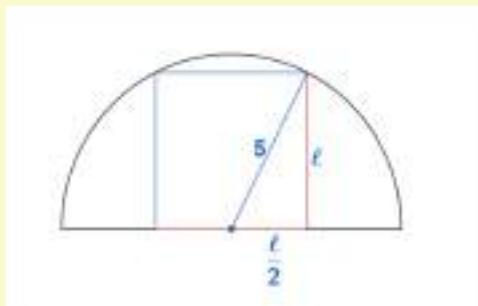
$$l^2 + l^2 = 10^2$$

$$2l^2 = 100$$

$$l^2 = 50$$

Por lo que $A_1 = 50$

Para el semicírculo



$$A_2 = l^2$$

Al trazar un radio del centro del semicírculo a un vértice del cuadrado sobre la circunferencia, se genera un triángulo rectángulo de hipotenusa 5. Aplicamos el Teorema de Pitágoras y obtenemos:

$$l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 5^2$$

$$l^2 + \frac{l^2}{4} = 25$$

$$\frac{5}{4}l^2 = 25$$

$$l^2 = 20$$

Así:

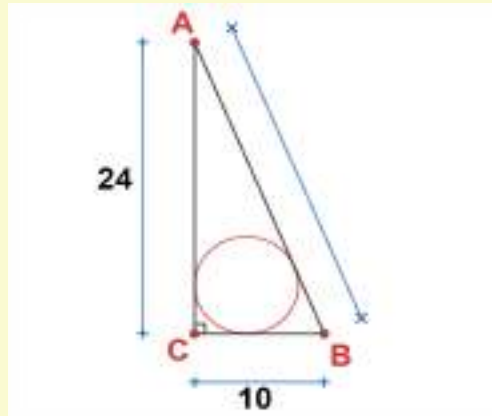
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$

Respuesta:

La razón entre las áreas es de $\frac{5}{2}$

.....

5. En el triángulo con vértices en A , B y C se inscribe un círculo como se muestra en la figura. Determinar el valor del radio r .

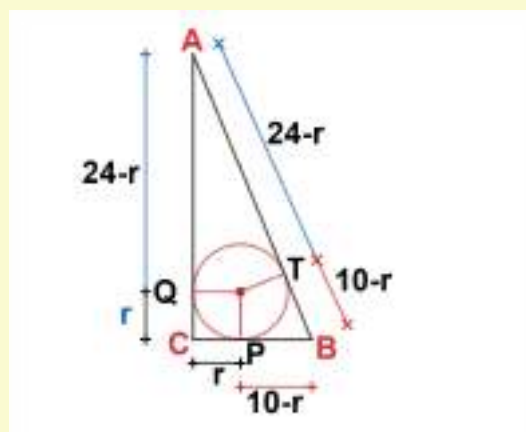


El triángulo es rectángulo en el vértice C , la longitud de la hipotenusa AB la calculamos aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$AB^2 = 10^2 + 24^2$$

$$AB = \sqrt{100 + 576} = 26$$

Si consideramos los vértices del triángulo como puntos externos al círculo desde los cuales se trazan tangentes en los puntos P , Q , T , la distancia desde los vértices a esos puntos, es la misma en cada caso.



Trazamos radios a los puntos de tangencia y notamos que

$$d(C, P) = d(C, Q) = r$$

$$d(B, P) = d(B, T) = 10 - r$$

$$d(A, T) = d(A, Q) = 24 - r$$

La hipotenusa queda dividida en dos segmentos cuyas longitudes suman 26, por lo que:

$$24 - r + 10 - r = 26$$

$$34 - 26 = 2r$$

$$8 = 2r$$

$$r = 4$$

Respuesta:

El radio del círculo mide 4.

.....

4.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Dos círculos concéntricos de radios 6.5 cm y 4.7 cm forman un anillo circular. Determinar el área y el perímetro de la región formada.

R/ El área es de 63.33 cm^2 y el perímetro es de 70.37 cm

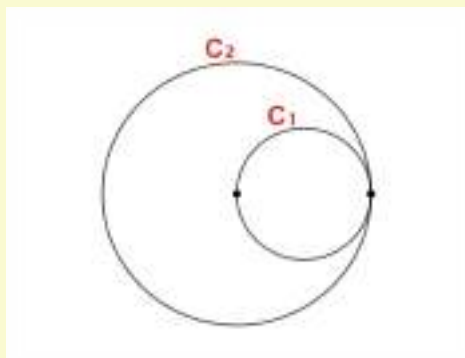
2. Determinar la medida del radio de un círculo en el que se inscribe un triángulo equilátero de lado 8.

R/ El radio es de 4.62

3. Determinar el radio de un círculo que se inscribe en un triángulo rectángulo con lados 8 cm, 15 cm y 17 cm.

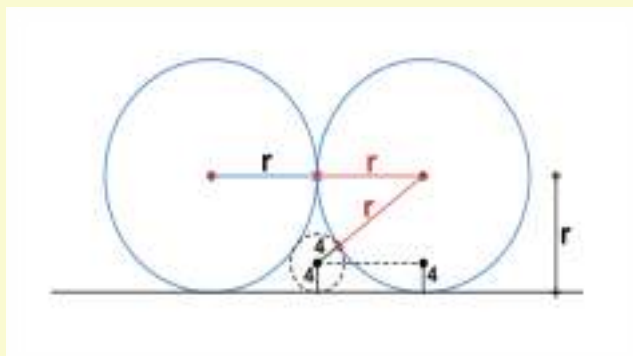
R/ El radio mide 3 cm.

4. El círculo 1 pasa por el centro del círculo 2 y es tangente a él. Si el área de $C_1 = 4 \text{ cm}^2$, determinar el área del círculo 2.



R/ El área del círculo 2 es de 16 cm^2

5. Tres círculos son tangentes a una recta horizontal y tangentes entre sí, como se muestra en la figura. El radio del círculo pequeño mide 4 cm. Determinar el radio de los dos círculos grandes.



R/ El radio de los círculos es de 16 unidades.

5. Polígonos regulares

Los polígonos regulares son aquellos cuyos lados tienen la misma medida, entre ellos se encuentran el triángulo equilátero, el cuadrado, el rombo, entre los más conocidos y utilizados podemos mencionar el pentágono y el hexágono, que tienen cinco y seis lados, respectivamente.

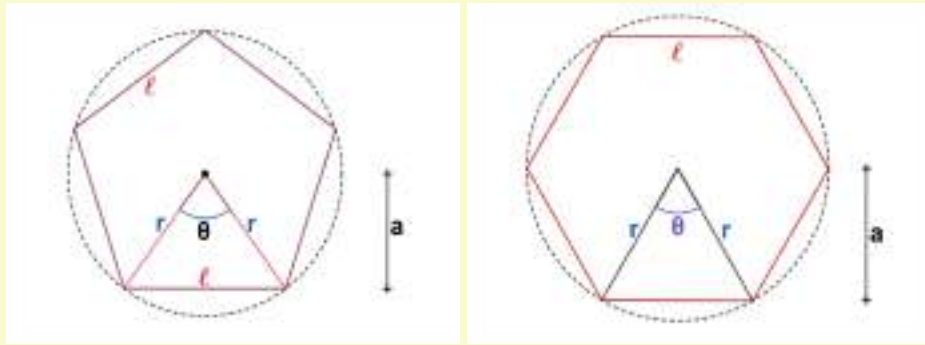
Se define como **apotema** de un polígono regular, la distancia de su centro al punto medio de uno de los lados.

El perímetro de un polígono regular de n lados se calcula por medio de la expresión

$$P = n * l$$

Una estrategia funcional para el cálculo del área de un polígono regular de n lados, consiste en trazar un círculo circunscrito auxiliar cuyo centro coincide con el centro del polígono y las distancias a los vértices coinciden con radios del círculo. Esta estrategia sirve para formar triángulos que en general son isósceles y el ángulo central $\theta = \frac{360^\circ}{n}$, es un ángulo dado de dicho triángulo.

Como ejemplo, se muestran los casos del pentágono y el hexágono, para el primero $\theta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, por lo que los ángulos con la base son iguales y suman $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. El caso del hexágono es singular, ya que $\theta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, lo que significa que los otros dos ángulos son iguales y suman 120° , es decir, cada ángulo mide 60° , por lo tanto, los triángulos son equiláteros



Una forma de calcular el área de un polígono es calcular el área de uno de los triángulos y multiplicar por n , tomando en cuenta que la altura del triángulo coincide con el apotema del polígono. La expresión general para el área es:

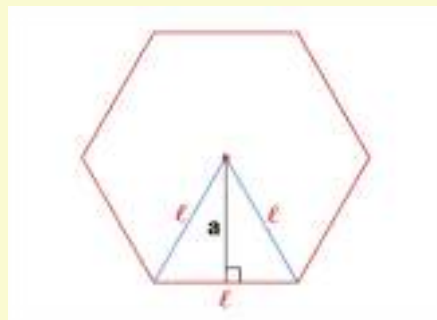
$$A = \frac{P * a}{2}$$

.....

5.1 Ejercicios resueltos

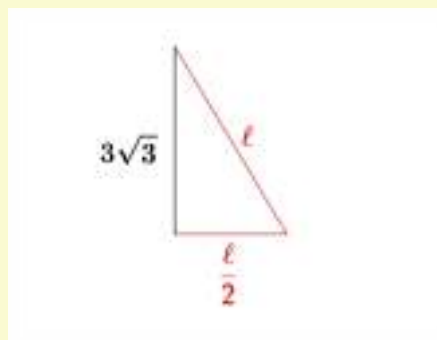
1. Determinar el área de un hexágono regular con apotema que mide $3\sqrt{3} \text{ cm}$.

Solución:



En el caso que se plantea se requiere determinar la medida del lado del hexágono, que coincide con el lado del triángulo equilátero que se forma, ya que sus tres ángulos miden 60° y su altura mide lo mismo que el apotema.

Calculamos la medida del lado con base en la figura.



$$(3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$(3\sqrt{3})^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$9(3) = \frac{3l^2}{4}$$

$$36 = l^2$$

$$6 = l$$

El área del hexágono es

$$A = \frac{Pa}{2}$$

$$A = \frac{6(6)(3\sqrt{3})}{2} = 93.53$$

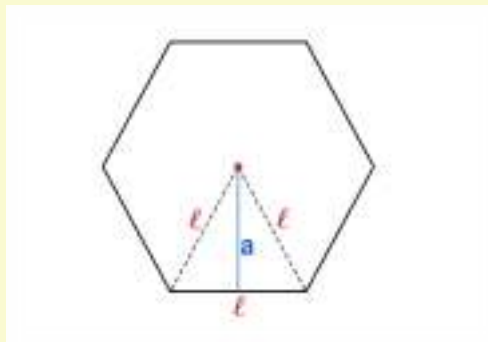
Respuesta:

El área del hexágono es 93.53 cm^2

.....

2. Si el área de un hexágono regular mide $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$, determinar cuánto mide el lado y el apotema.

Solución:



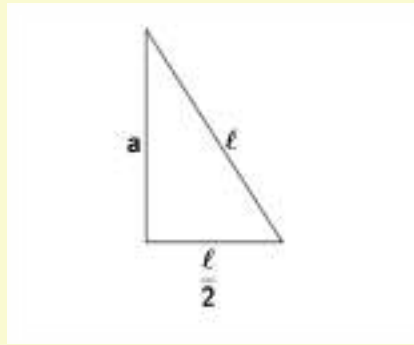
Para el hexágono dado se desconoce l y a y se conoce que $A = 36\sqrt{3}$, por lo que:

$$\frac{Pa}{2} = 36\sqrt{3}$$

$$6la = 72\sqrt{3}$$

$$la = 12\sqrt{3}$$

Expresamos a en términos de l y despejamos para calcular su valor



$$a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3}{4}l^2$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

Por lo que:

$$l \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l \right) = 12\sqrt{3}$$

$$l^2 = 24$$

$$l \cong 4.9$$

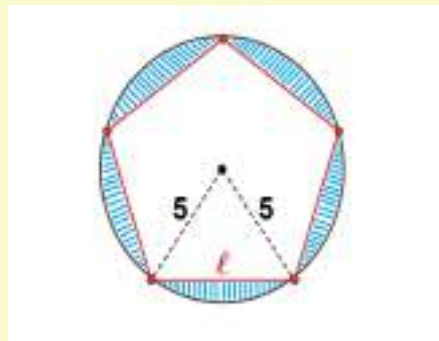
El apotema mide $a = \frac{\sqrt{3}}{2}(4.9) = 4.24$

Respuesta:

El lado del hexágono mide 4.9 cm y el apotema mide 4.24 cm.

.....

3. Un pentágono regular cuyo apotema mide $2\sqrt{3}$ cm se inscribe en un círculo de radio 5 cm. Determinar el área fuera del pentágono y dentro del círculo, como se muestra en la figura.



Solución:

El área sombreada la calculamos a partir de la expresión:

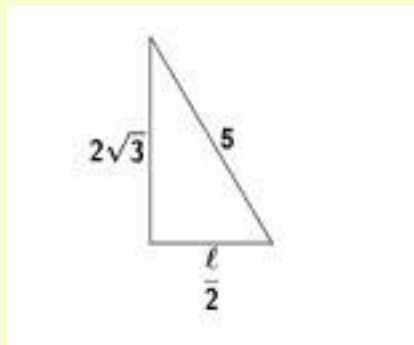
$$A_s = A_C - A_P$$

El área del círculo la obtenemos a partir de $r = 5 \text{ cm}$

$$A_C = \pi(5)^2 = 25\pi$$

$$A_C \cong 78.54 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área del pentágono, calculamos la medida de su lado, con base en el triángulo isósceles que se forma y el trazo de su altura, generamos la figura.



$$(2\sqrt{3})^2 + \frac{l^2}{4} = 25$$

$$l^2 = 25 - 4(3)$$

$$l = \sqrt{13}$$

$$l \cong 3.6$$

Calculamos el área del pentágono

$$A_P = \frac{Pa}{2}$$

$$A_P = \frac{5(3.6)(2\sqrt{3})}{2} = 31.18 \text{ cm}^2$$

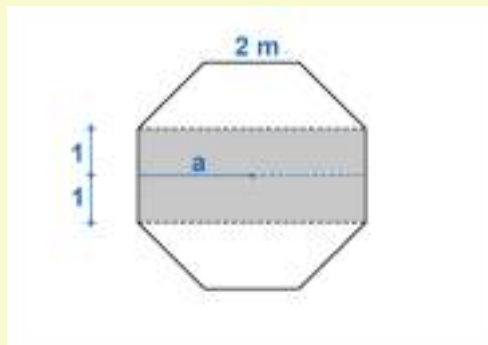
Así,

$$A_s = 78.54 - 31.18 = 47.36 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área fuera del pentágono pero dentro del círculo es de 47.36 cm^2 .

4. En un jardín de forma octogonal se deja un área de caminamiento que se muestra sombreada en la figura. Determinar el área disponible para caminar.

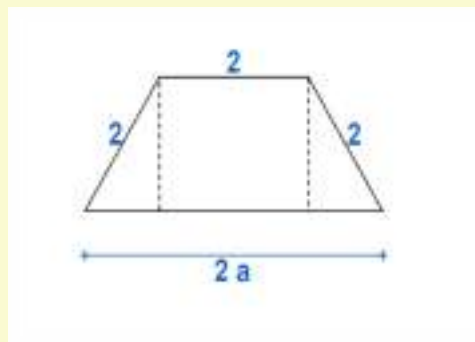


Solución:

Observamos en la figura que el área para caminar tiene forma rectangular cuyo largo mide $2a$ y su ancho es de $2m$, pues coincide con la medida del lado del octágono regular:

$$A_C = (2a)(2) = 4a$$

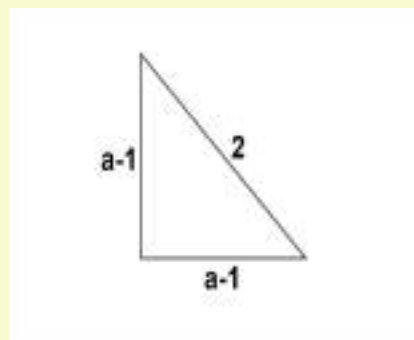
Calculamos el apotema a partir de uno de los trapecios con base menor $b = 2$, la base mayor $B = 2a$ y lados de 2 .



La base de uno de los triángulos mide $\frac{2a-2}{2} = \frac{2(a-1)}{2} = a-1$

La altura mide también $a-1$, pues el ancho del caminamiento mide 2 , por lo que hay una unidad hacia arriba y hacia abajo del centro.

Entonces:



$$(a-1)^2 + (a-1)^2 = 2^2$$

$$2(a-1)^2 = 4$$

$$(a-1)^2 = 2$$

$$a^2 - 2a + 1 - 2 = 0$$

$$a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

El apotema mide: $a = 1 \pm \sqrt{2} = 2.41$ La base del rectángulo del caminamiento mide $2a$

$$2(2.41) = 4.82$$

El área del caminamiento es:

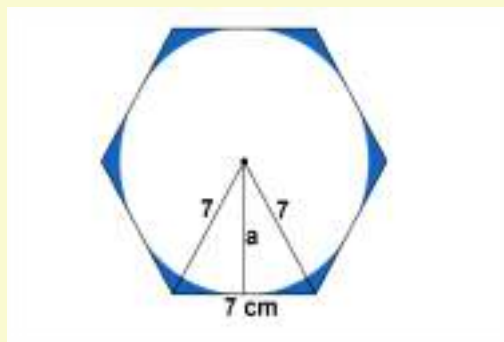
$$A_C = 4.82(2) = 9.64 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El caminamiento tiene un área de 9.64 cm^2 .

.....

5. En un hexágono regular cuyo lado mide 7cm se inscribe un círculo. Determinar el área fuera del círculo y dentro del hexágono.



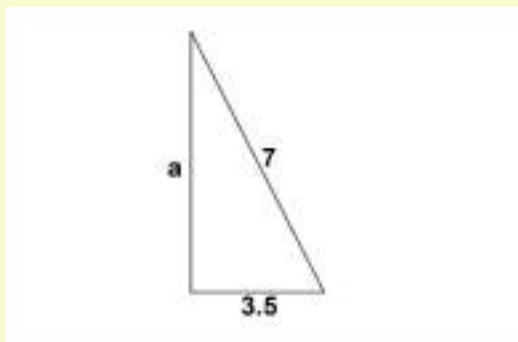
Solución:

En la figura observamos que el área sombreada es la diferencia entre el área del hexágono y el área del círculo:

$$A_S = A_H - A_C$$

$$A_S = \frac{6(7)a}{2} - \pi r^2$$

Notamos que $r = a$, cuyo valor está dado por



$$a^2 + (3.5)^2 = 7^2$$

$$a = \sqrt{49 - 12.25} = 6.06$$

Por lo que:

$$A_S = 21(6.06) - \pi(6.06)^2$$

$$A_S = 127.26 - 115.37$$

$$A_S = 11.89 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área dentro del hexágono y fuera del círculo es de 11.89 cm^2 .

.....

5.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

- Determinar el área de un hexágono regular cuyo lado mide 15 cm.
R/ El área es 590.85 cm^2
- Si el apotema de un hexágono regular mide 4 cm, determinar cuanto mide el área y el perímetro.
R/ El área es 55.44 cm^2 y el perímetro es 27.72 cm
- Un pentágono regular cuyo lado mide 17 cm se inscribe en un círculo de radio 10 cm. Determinar el área fuera del pentágono y dentro del círculo.
R/ El área es de 90.19 cm^2
- Determinar la diferencia entre las áreas de un hexágono regular circunscrito y un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 5.
R/ La diferencia es de 21.6 u^2
- En un círculo de radio 9cm se inscribe un hexágono regular cuyo apotema mide 5cm. Determinar la diferencia entre el área de un círculo y el área del hexágono.
R/ La diferencia es de 18.17 cm^2

6. Áreas de figuras compuestas

Introducción

Muchas formas geométricas que se encuentran en la naturaleza y en las obras del ser humano, se componen de varias figuras geométricas o partes de ellas, por lo que el cálculo de áreas involucran de forma simultánea lo aprendido para las figuras individuales, tales como: círculos, cuadriláteros, triángulos, polígonos, entre los principales.

Las figuras pueden formarse de varias formas individuales, o bien, por la inscripción de unas en otras o la superposición de ellas. El área de interés puede calcularse de forma directa, por medio de la suma de áreas de diferentes regiones, así como, por la diferencia entre ellas.

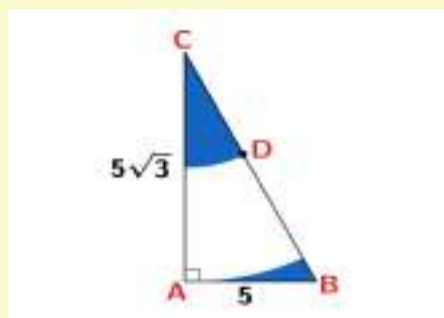
.....

6.1 Ejercicios resueltos

1. Calcular el área sombreada en la figura, con D punto medio de BC.

Solucion:

Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular CB.



$$(CB^2) = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$CB = \sqrt{25 + 75} = 10$$

Podemos afirmar que el ángulo en el vértice C, mide 30° , ya que la hipotenusa mide el doble que el cateto opuesto.

El área sombreada abarca dos regiones: un sector circular para un ángulo $\theta = 30^\circ$ que denotamos por A_1 y una región en la parte inferior que denotamos para A_2 .

Así, $A_s = A_1 + A_2$

Para calcular A_1 notamos que el radio del sector circular es la mitad de la hipotenusa; $r = 5$ y

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

$$A_1 = \frac{1}{12}\pi r^2$$

$$A_1 = \frac{1}{12}\pi(5)^2 = \frac{25}{12}\pi$$

El área de la región inferior, A_2 , la calculamos por la diferencia entre el área del triángulo y el área del sector circular de ángulo θ y radio $r = 5\sqrt{3}$.

$$A_2 = A_T - A_{SC}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(5)(5\sqrt{3}) - \frac{1}{12}\pi(5\sqrt{3})^2$$

$$A_2 = \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{75}{12}\pi$$

Calculamos el área sombreada.

$$A_s = A_1 + A_2$$

$$A_s = \frac{25}{12}\pi + \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{75}{12}\pi$$

$$A_s = \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{50}{12}\pi$$

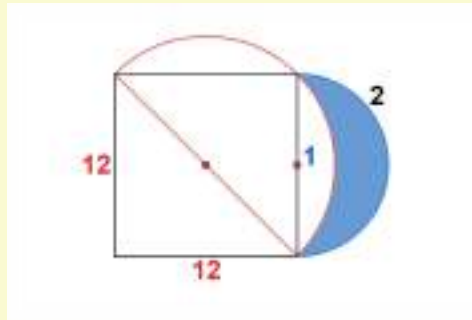
$$A_s = 21.65 - 13.09$$

Respuesta:

El área sombreada es: $A_s = 8.56 \text{ u}^2$

.....

2. Sobre la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 12 cm , se construye un semicírculo, además, se construye otro semicírculo cuyo diámetro coincide con un lado del cuadrado. Calcular el área sombreada en la figura.

**Solucion:**

En la figura se identifican dos regiones; el semicírculo con diámetro sobre el lado del cuadrado, con $r = 6$ y la región 1, correspondiente a la mitad del área dentro del primer semicírculo y la mitad del cuadrado.

$$\text{Así: } A_S = A_2 - A_1$$

$$\text{Calculamos: } A_2 = \frac{1}{2}\pi(6)^2 = 18\pi = 56.55 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}l^2\right]$$

El valor de r es la mitad de la diagonal.

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{12^2 + 12^2})$$

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{288}) = 8.48$$

Sustituimos r y l para calcular A_1 .

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\pi(8.48)^2 - \frac{1}{2}(12)^2\right]$$

$$A_1 = \frac{1}{2}[112.96 - 72] = 20.48 \text{ cm}^2$$

$$A_S = 56.55 - 20.48$$

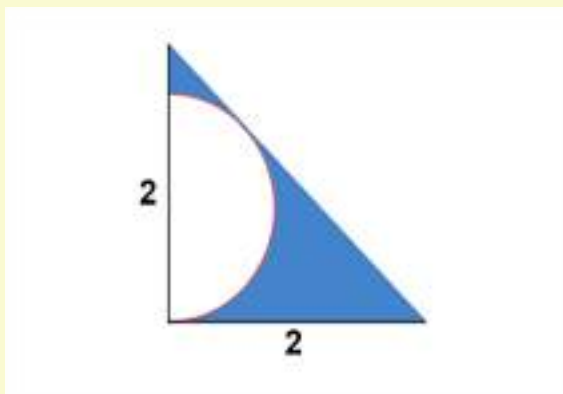
$$A_S = 36.07 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área sombreada es 36.07 cm^2

.....

3. En un triángulo rectángulo isósceles de lado 2 cm se inscribe un semicírculo como se muestra en la figura. Calcular el área fuera del semicírculo y dentro del triángulo.

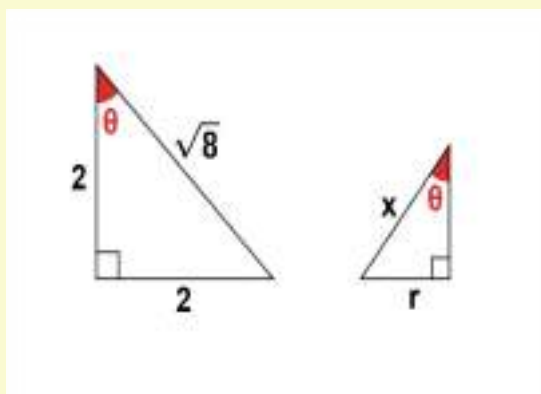
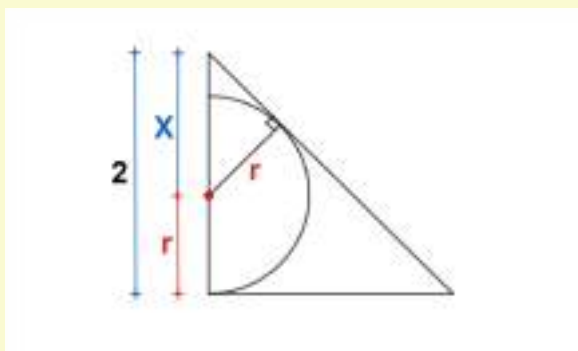
**Solución:**

El área sombreada corresponde a la diferencia entre el área del triángulo y el área del semicírculo.

$$A_S = A_T - A_{SC}$$

$$A_S = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}\pi r^2$$

El área del triángulo es: $A_T = \frac{1}{2}(2)(2) = 2 \text{ cm}$. Para calcular el área del semicírculo, necesitamos conocer r . Trazamos un radio al punto de tangencia con la hipotenusa y construimos un triángulo semejante al triángulo dado.



La hipotenusa del triángulo dado es.

$$Z = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Establecemos relaciones de proporcionalidad y despejamos r:

$$\text{con : } x + r = 2$$

$$\frac{2}{r} = \frac{\sqrt{8}}{x}$$

$$\frac{2}{r} = \frac{\sqrt{8}}{2-r}$$

$$2(2-r) = \sqrt{8}r$$

$$4 - 2r = \sqrt{8}r$$

$$4 = \sqrt{8}r + 2r$$

$$4 = r(\sqrt{8} + 2)$$

$$\frac{4}{\sqrt{8} + 2} = r$$

$$0.83 = r$$

Ahora podemos calcular el área del semicírculo inscrito.

$$A_{SC} = \frac{1}{2}\pi(0.83)^2$$

$$A_{SC} = 1.08 \text{ cm}^2$$

$$A_S = 2 - 1.08$$

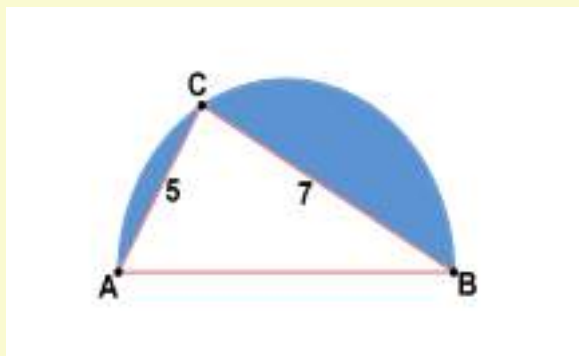
$$A_S = 1.92 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área sombreada es 1.92 cm^2

.....

4. En un semicírculo se inscribe un triángulo como se muestra en la figura. Determinar el área sombreada.



Solución:

En la figura se observa que uno de los lados del triángulo coincide con el diámetro del semicírculo y el vértice C se ubica sobre la circunferencia. Por lo que el triángulo es rectángulo, cuya hipotenusa mide: $AB = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8.6$. Si el diámetro mide 8.6 entonces $r = \frac{8.6}{2} = 4.3$.

El área sombreada la calculamos restando el área del triángulo al área del semicírculo.

$$A_S = A_{SC} - A_T$$

$$A_S = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}bh$$

$$A_S = \frac{1}{2}\pi(4.3)^2 - \frac{1}{2}(5)(7)$$

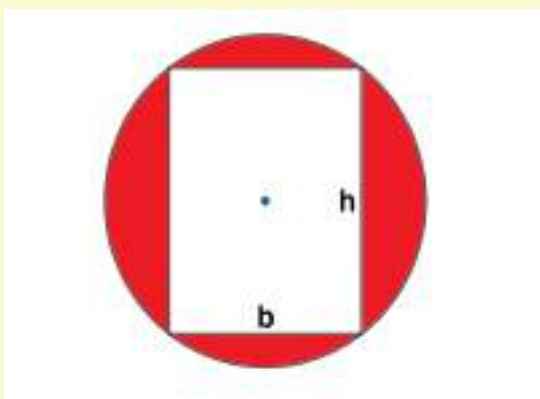
$$A_S = 29.04 - 17.5 = 11.54$$

Respuesta:

El área sombreada es 11.54 cm^2

.....

5. En un círculo de radio 5 cm se inscribe un rectángulo cuya altura es 3 unidades más que la medida de su base. Determinar el área fuera del rectángulo y en el interior del círculo.

**Solución:**

Sabemos que el radio del círculo mide 5 cm y que $h = b + 3$. El área sombreada está dada por:

$$A_S = A_C - A_r$$

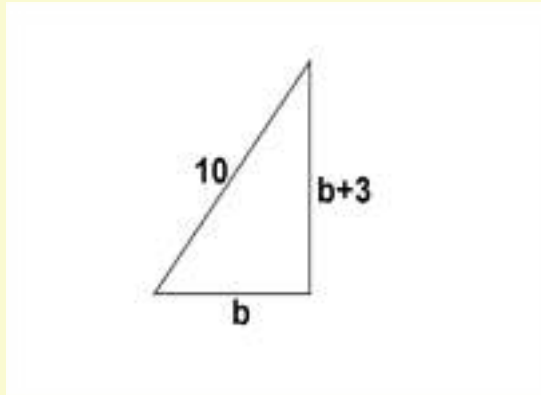
El área del círculo es:

$$A_C = \pi r^2$$

$$A_C = \pi(5)^2$$

$$A_C = 25\pi$$

Para calcular el área del rectángulo necesitamos conocer sus dimensiones, por lo que trazamos un diámetro para formar un triángulo rectángulo al que aplicamos el teorema de Pitágoras y luego resolvemos la ecuación resultante.



$$b^2 + (b+3)^2 = 10^2$$

$$b^2 + b^2 + 6b + 9 - 100 = 0$$

$$2b^2 + 6b - 91 = 0$$

$$b = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(2)(-91)}}{4}$$

$$b = \frac{-6 \pm 27.64}{4}$$

$$b = 5.41 \text{ cm}$$

$$h = 5.41 + 3 = 8.41 \text{ cm}$$

$$A_r = (5.41)(8.41) = 45.5 \text{ cm}^2$$

$$A_S = 25\pi - 45.5$$

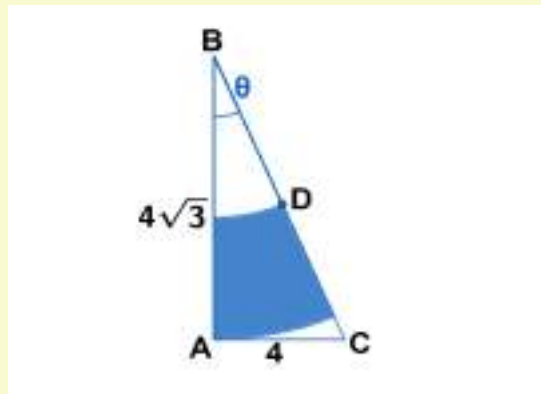
$$A_S = 33.04 \text{ cm}^2$$

Respuesta:

El área fuera del rectángulo y en el interior del círculo es de 33.04 cm^2

6.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Calcular el área sombreada, si D es el punto medio del segmento BC.

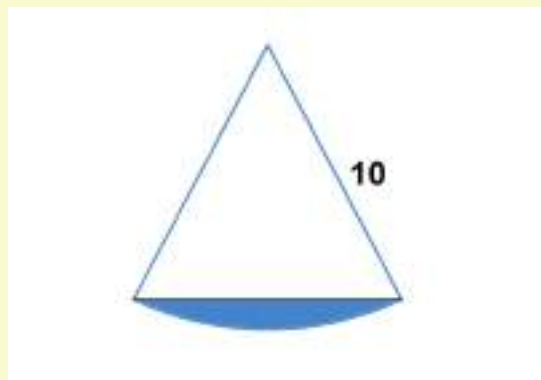


R/ El área sombreada es $8.38 u^2$.

2. Se inscribe un círculo en un triángulo isósceles cuya base mide 2 cm y la altura mide 1 cm . Determinar el área fuera del círculo y dentro del triángulo.

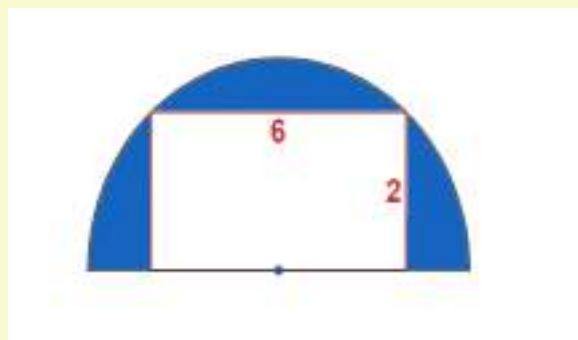
R/ El área fuera del círculo y dentro del triángulo es 0.47 cm^2

3. Determinar el área sombreada si el triángulo es equilátero de lado 10.



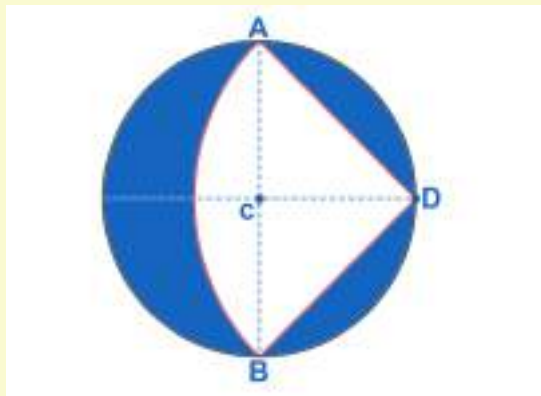
R/ El área sombreada es $30.71 u^2$

4. En un semicírculo se inscribe un rectángulo de largo 6 cm y altura 2 cm , como se muestra en la figura. Determinar el área sombreada.



R/ El área sombreada es 8.42 cm^2

5. Determinar el área sombreada si $CD = 5$



R/ El área sombreada es $39.27 u^2$

7. Volumen de sólidos

Introducción

Los sólidos tridimensionales forman parte de la vida cotidiana, en diversos tamaños y aplicaciones. También se presentan con frecuencia en contextos de las ciencias aplicadas.

Entre los llamados cuerpos redondos, se encuentran la esfera, el cilindro y el cono recto circular, para los cuales es importante calcular el volumen y en área superficial, a partir de las siguientes expresiones.

Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

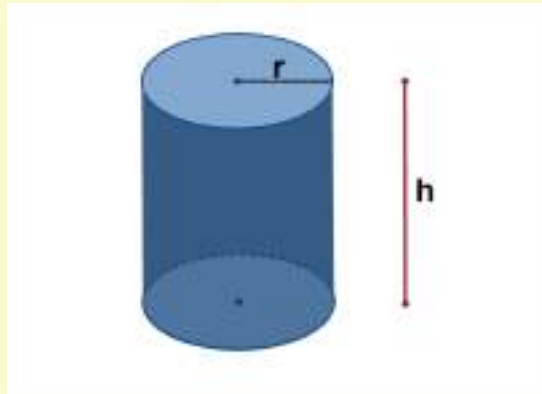
$$As = 4\pi r^2$$



Cilindro

$$V = \pi r^2 h$$

$$As = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$



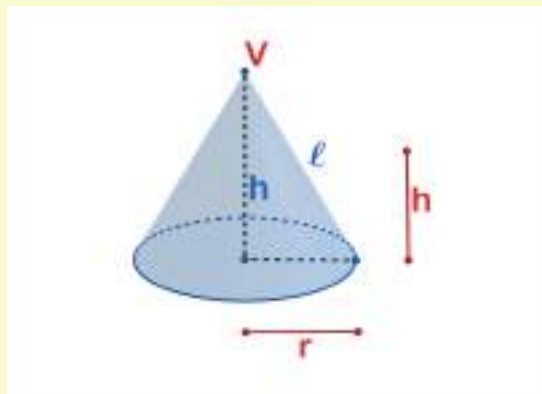
Las caras circulares se llaman bases y el área lateral consiste de la medida de la superficie lateral.

Cono Recto circular

Este cuerpo consta de una base circular, un vértice y un segmento trazado de éste perpendicularmente a la base.

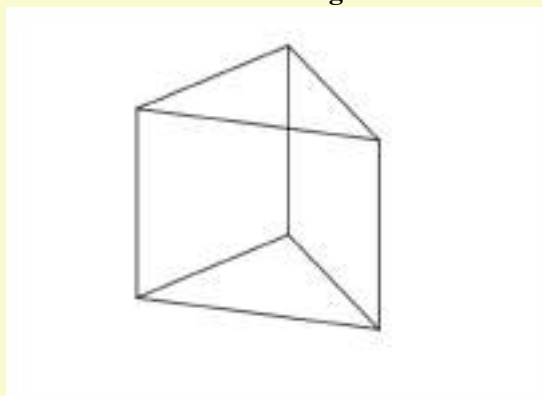
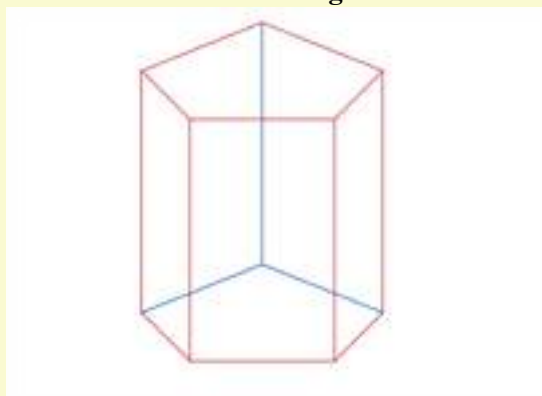
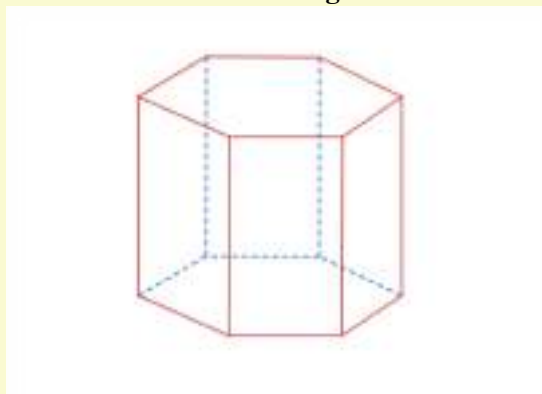
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$As = \pi r^2 + \pi r g$$



Los sólidos llamados prismas están limitados por dos caras congruentes paralelas a las que conoce como bases y caras laterales formadas por paralelogramos. Las caras se intersectan en las aristas y las intersecciones de las aristas son los vértices.

Los prismas rectos son aquellos en los que la altura es perpendicular a las bases, de cuya forma reciben su nombre; por ejemplo.

Prisma Triangular**Prisma Pentagonal****Prisma Hexagonal**

En cualquiera de los casos, el volumen se determina por medio del producto del área de la base por la altura:

$$V = A_B h$$

Las pirámides regularmente tienen como base un polígono regular y caras triangulares con un punto en común llamado vértice; si la altura es perpendicular a la base se llama pirámide recta. Se muestra como ejemplo una pirámide de base cuadrada.



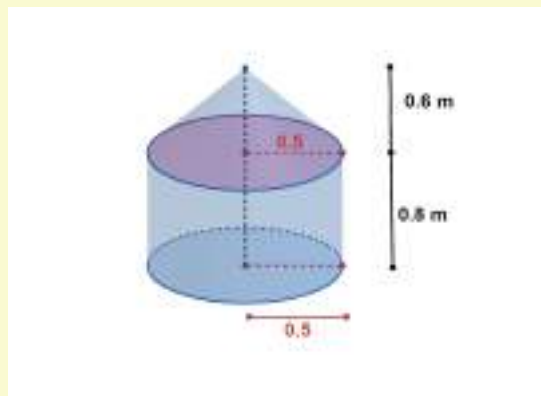
.....

7.1 Ejercicios resueltos

1. Un recipiente industrial está forrado por una parte cilíndrica de 1 m de diámetro y 80 cm de altura, y una parte cónica de 60 cm de altura, Determinar la capacidad del recipiente.

Solución:

Representamos el recipiente en la siguiente figura.



La capacidad del recipiente está dada por la suma del volumen de la parte cilíndrica con el volumen de la parte cónica; expresamos esto como:

$$\begin{aligned}
 V &= V_{cil} + V_{cono} \\
 V &= \pi r^2 h_{cil} + \frac{1}{3} \pi r^2 h_{cono} \\
 V &= \pi (0.5)^2 (0.8) + \frac{1}{3} \pi (0.5)^2 (0.6) \\
 V &= 0.63 + 0.16 \\
 V &= 0.79 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Respuesta:

La capacidad del recipiente es de 0.79 m^3 .

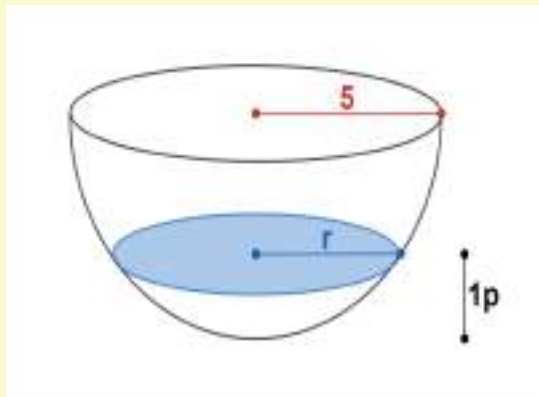
2. Un depósito semiesférico con radio de 5 p contiene agua hasta 1 p de altura. Determinar el área del espejo del agua en ese momento.

Solución:

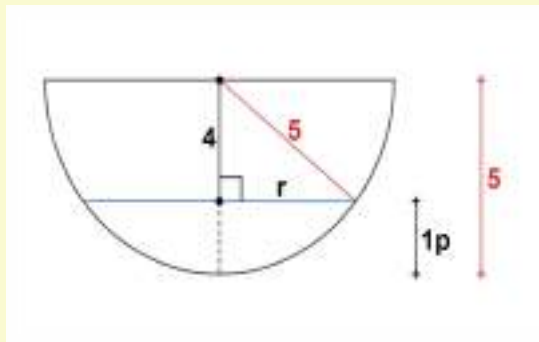
La superficie del agua en un depósito toma la forma del recipiente, en este caso, una forma circular, así que el área esta dada por.

$$A_s = \pi r_a^2$$

Es necesario determinar cuánto mide el radio de la superficie del agua, para una altura de 1 pie, como se muestra en la figura.



Con un corte transversal en la figura de interés, se traza un radio y se genera un triángulo rectángulo.



Aplicamos el Teorema de Pitágoras y despejamos r .

$$4^2 + r^2 = 5^2$$

$$16 + r^2 = 25$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

Ahora calculamos el área del espejo del agua para $h = 1$ pie.

$$A = \pi(3)^2$$

$$A = 28.27 \text{ pies}^2$$

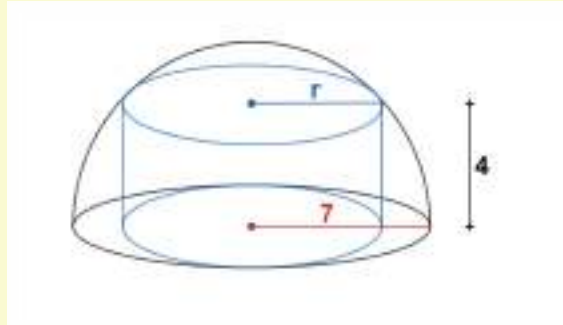
Respuesta:

El área del espejo de agua es de 28.27 pies^2

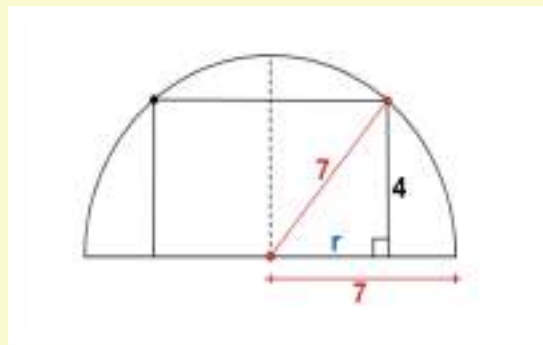
3. Se inscribe un cilindro de altura 4 cm y radio r , en una semiesfera que tiene 7 cm de radio. Determinar el volumen dentro de la semiesfera y fuera del cilindro.

Solución:

En la figura se muestra un cilindro inscrito en una semiesfera.



Por medio de un corte trasversal representamos una situación equivalente en el plano, que muestra un rectángulo inscrito en un semicírculo, en la cual se traza un radio del centro al punto de intersección para formar un triángulo rectángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos el radio del cilindro:

$$r^2 + 4^2 = 7^2$$

$$r^2 = 49 - 16 = 33$$

$$r = 5.74$$

El volumen que buscamos está dado por:

$$V = V_{se} - V_{cil}$$

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r_e^3 \right) - \pi r_{cil}^2 h_{cil}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi (7)^3 - \pi (33)(4)$$

$$V = 718.38 - 414.69$$

$$V = 303.69$$

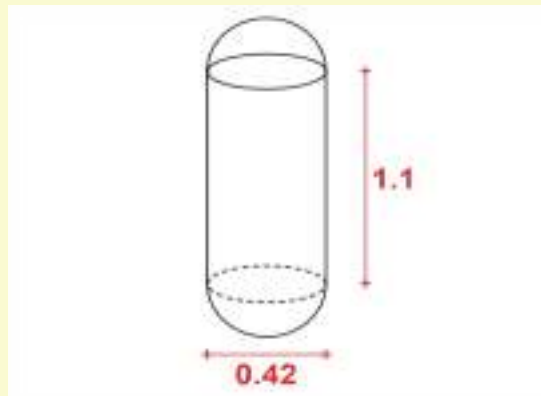
Respuesta:

El volumen dentro de la semiesfera y fuera del cilindro es de 303.69 cm^3 .

4. Una cápsula de un medicamento tiene una parte cilíndrica con dos semiesferas en los extremos. Si la parte cilíndrica mide 1.1 cm de largo y el diámetro es de 0.42 cm determinar el volumen de la cápsula.

Solución:

En la figura se muestra la situación planteada.



El volumen de la cápsula equivale al volumen de la parte cilíndrica más el volumen de dos semiesferas del mismo radio que el cilindro. Esto lo podemos expresar así.

$$V = V_{cil} + V_{esfera}$$

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r = \frac{0.42}{2} = 0.21$$

$$V = \pi(0.21)^2(1.1) + \frac{4}{3}\pi(0.21)^3$$

$$V = 0.15 + 0.039$$

$$V = 0.189 \text{ cm}^3$$

Respuesta:

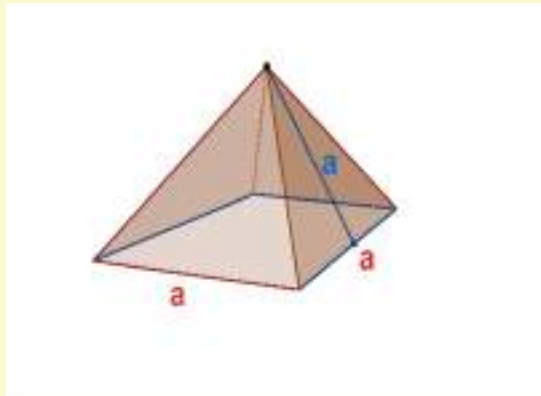
La cápsula tiene un volumen de 0.189 cm^3

.....

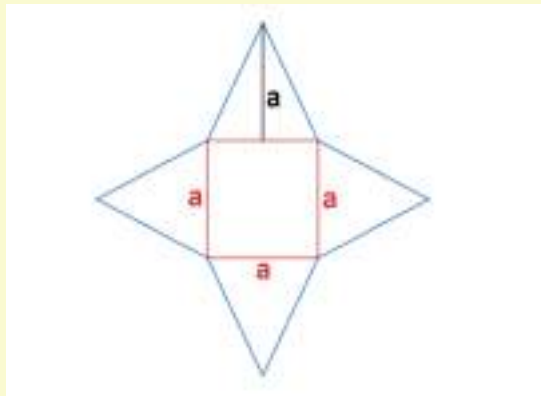
5. El área total de una pirámide con base cuadrada es de 147 cm^2 . Si la arista de la base mide lo mismo que la altura de las caras triangulares inclinadas, determinar la longitud del lado del cuadrado de la base y la altura de la pirámide.

Solución:

En la siguiente figura identificamos la longitud del cuadrado de la base y la altura de la cara triangular inclinada, como a .

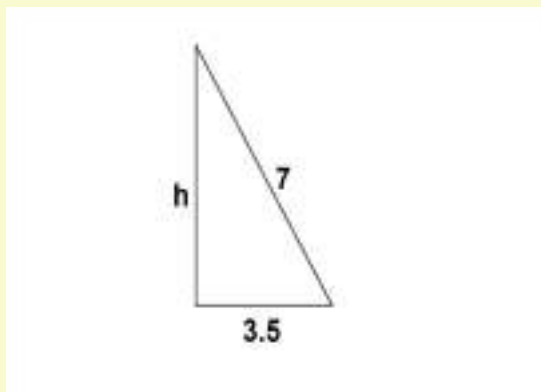


El área total de la pirámide está formada por el cuadrado de la base y cuatro triángulos isósceles como se representa en la siguiente figura.



$$\begin{aligned}
 A &= A_B + 4A_T \\
 147 &= a^2 + 4\left(\frac{1}{2}a * a\right) \\
 147 &= a^2 + 2a^2 \\
 147 &= 3a^2 \\
 49 &= a^2
 \end{aligned}$$

Así, el área de la base mide 49 cm^2 , entonces $a = 7$. La altura de la pirámide es perpendicular a la base en el centro, ubicado a una distancia de $\frac{a}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$. Se forma el triángulo rectángulo que se muestra. Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos h .



$$h^2 + 3.5^2 = 49$$

$$h = \sqrt{49 - 12.25}$$

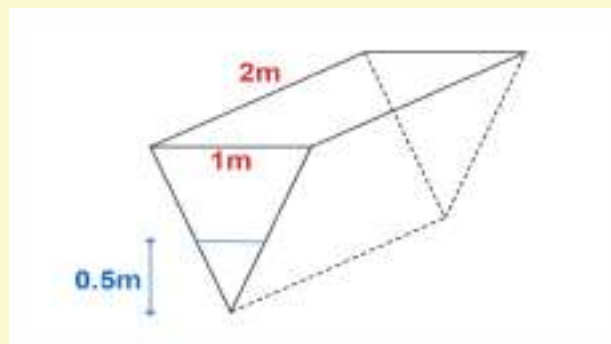
$$h = 6.06 \text{ cm}$$

Respuesta:

La altura de la pirámide es de 6.06 cm y el lado de su base es de 7 cm.

.....

6. Un depósito de agua tiene 2 metros de largo y una sección transversal con la forma de un triángulo isósceles con las medidas que se muestran. Determinar la capacidad del depósito y el volumen de agua cuando la altura es de 0.5 m.

**Solución:**

La expresión para calcular la capacidad del tanque corresponde al volumen de un prisma triangular.

$$b = 1, \quad l = 2$$

$$V = A_T l$$

$$V = \frac{1}{2} b h l$$

$$V = \frac{1}{2} (1) h (2)$$

$$V = h$$

Como el triángulo es equilátero calculamos h así.

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$h^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

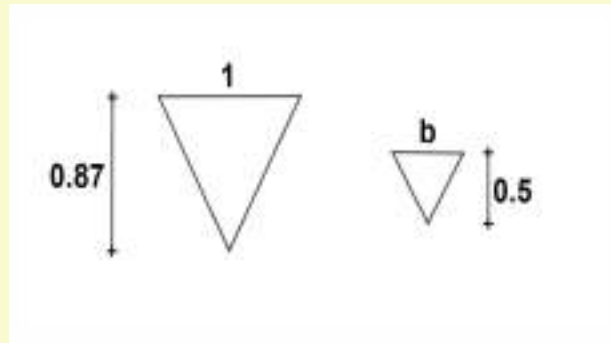
$$h^2 = \frac{3}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituimos h y obtenemos que.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87m^3$$

Para calcular el volumen de agua en el depósito cuando $h = 0.5$, aplicamos semejanza de triángulos para determinar b .



$$\frac{1}{b} = \frac{0.87}{0.5} \Rightarrow b = \frac{0.5}{0.87} = 0.27$$

$$V_a = \frac{1}{2}bhl$$

$$V_a = \frac{1}{2}(0.27)(0.5)(2) = 0.135 m^3$$

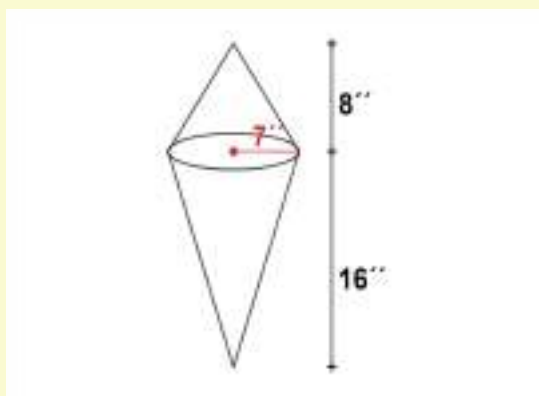
Respuesta:

El volumen de agua es de $0.135 m^3$.

.....

7.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Determinar el volumen del recipiente formado por dos conos, como se muestra en la figura.



R/ El volumen es $1231.5 \text{ pulgadas}^3$

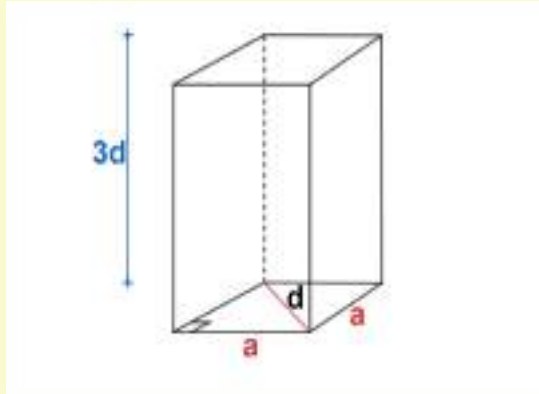
2. Se inscribe un cilindro de altura 7 cm y radio r , en una esfera cuyo radio mide 6 cm . Determinar el volumen fuera del cilindro y dentro de la esfera.

R/ El volumen es 382.49 cm^3

3. Una esfera cuyo radio mide 6.81 *pulgadas* se inscribe en un cilindro. Determinar el volumen dentro del cilindro y fuera de la esfera.

R/ El volumen es 661.45 *pulgadas*³

4. En la figura que se muestra, la base es cuadrada con diagonal d . Las caras laterales miden cada una 20 cm^2 , con una altura que triplica a la diagonal de la base. Determine el área de la base cuadrada.

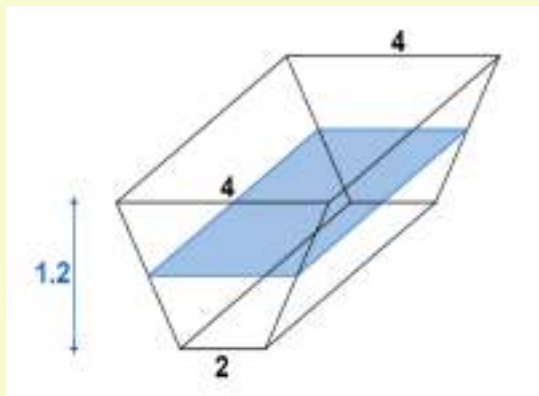


R/ El área es de 4.72 cm^2

5. Determinar el volumen de una caja con forma de prisma hexagonal con lado de 13 cm y altura 15 cm .

R/ El volumen es de $6,587.10 \text{ cm}^3$

6. Un depósito de 3 m de largo tienen sección transversal con forma de trapecio isósceles de 1.2 m de altura y bases de 4 m y 2 m . Determinar la capacidad del depósito y el área del espejo del agua a una altura de 0.8 m .



R/ La capacidad es de 10.8 m^3 y el área es de 10.02 cm^2



Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.