



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo IV: Funciones

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería **Fascículo IV: Funciones**

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Noviembre de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Funciones: dominio, rango y notación	9
2.1	Ejercicios resueltos	11
2.2	Ejercicios para la autoevaluación	17
3	Gráficas de funciones	19
3.1	Ejercicios resueltos	26
3.2	Ejercicios para la autoevaluación	30
4	Funciones y modelos lineales	33
4.1	Funciones lineales	33
4.1.1	Ejercicios resueltos	35
4.1.2	Ejercicios para la autoevaluación	41
4.2	Modelos lineales	42
4.2.1	Ejercicios resueltos	42
4.2.2	Ejercicios para la autoevaluación	46
5	Funciones y modelos cuadráticos	49
5.1	Funciones cuadráticas	49
5.1.1	Ejercicios resueltos	50
5.1.2	Ejercicios para la autoevaluación	55
5.2	Modelos cuadráticos	56
5.2.1	Ejercicios Resueltos	57
5.2.2	Ejercicios para la autoevaluación	62

6	Transformación de funciones	65
6.1	Ejercicios resueltos	70
6.2	Ejercicios para la autoevaluación	77
7	Combinación y composición de funciones	79
7.1	Ejercicios resueltos	79
7.2	Ejercicios para la autoevaluación	82
	Bibliografía	85



1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

***Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo IV: Funciones***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala



2. Funciones: dominio, rango y notación

El concepto de función y sus aplicaciones para modelar el comportamiento de diversos fenómenos, es uno de los temas más importantes de la matemática preuniversitaria y del nivel superior.

En su forma más sencilla, una función expresa la relación entre dos conjuntos de variables, de tal manera que los valores que puede tomar una de ellas, dependen de los valores que tome la otra.

Algunos ejemplos de asociaciones entre conjuntos de variables son:

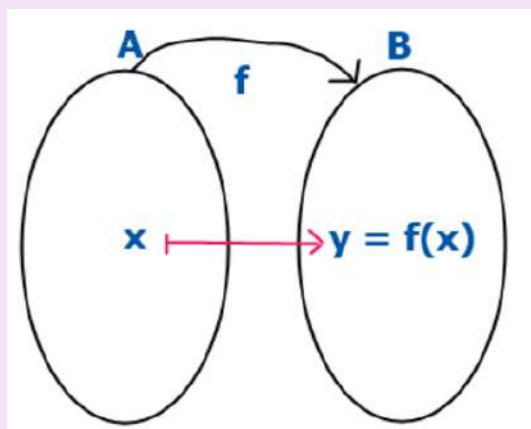
- a) El ingreso anual de un trabajador depende del salario mensual que recibe.
- b) La cantidad de galones de combustible que consume un auto se relaciona con la cantidad de kilómetros que recorre en un viaje.
- c) El volumen de una esfera varía de acuerdo con el valor del radio.
- d) El tiempo que dura un viaje a rapidez constante depende de la distancia que se recorra.

Es importante tener presente que no todas las relaciones entre conjuntos de variables son funciones, solamente lo serán aquellas que satisfacen ciertas condiciones, por lo que definimos a continuación una función para el caso de variables que toman valores en el conjunto de los números reales, o bien, algún subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definición

Sean A y B dos conjuntos de números reales y una ley de correspondencia entre ellos que cumple con: a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento en el conjunto B.

Las funciones se denotan por: f, g, h, F, G, entre otras. En la siguiente figura se muestran tres elementos importantes del concepto de función: un conjunto de partida denotado por A y conocido como **dominio**, un conjunto de llegada denotado por B y llamado **rango**, **contradominio** o **codominio**.



La notación para expresarlo es:

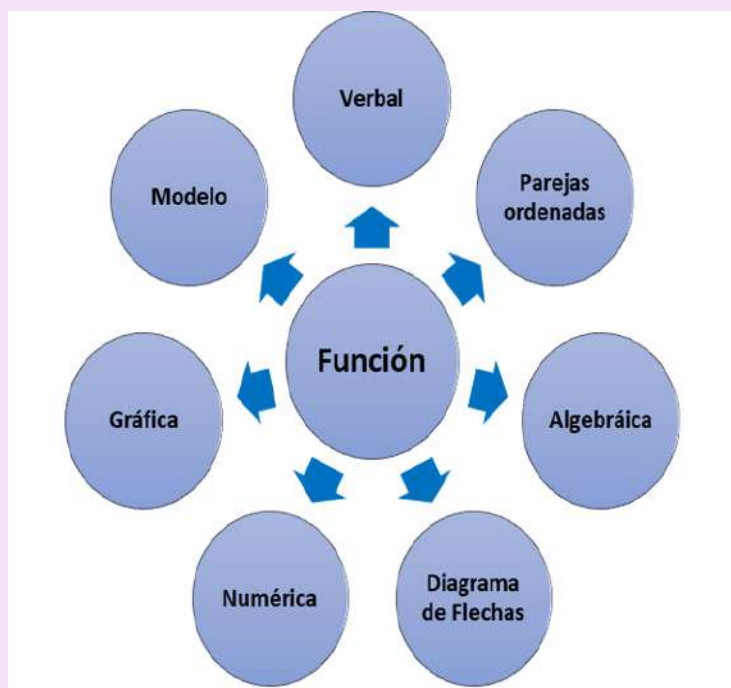
$$f : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = y$$

Los valores que toma la variable x se conocen como imágenes de x , $f(x)$ se lee como “ f de x ”, eso significa el valor de la imagen de x bajo la función f .

Así, una función se puede representar como un conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$, dado que x y su imagen y , son números reales, es posible organizarlos en una tabla y posteriormente representarlos en el plano cartesiano; además, podemos expresarlos en forma algebraica.

El aprendizaje de funciones incluye el dominio de las diferentes formas de representación y las aplicaciones en la modelación de situaciones diversas. Las diferentes representaciones de una función se muestran en la figura siguiente:

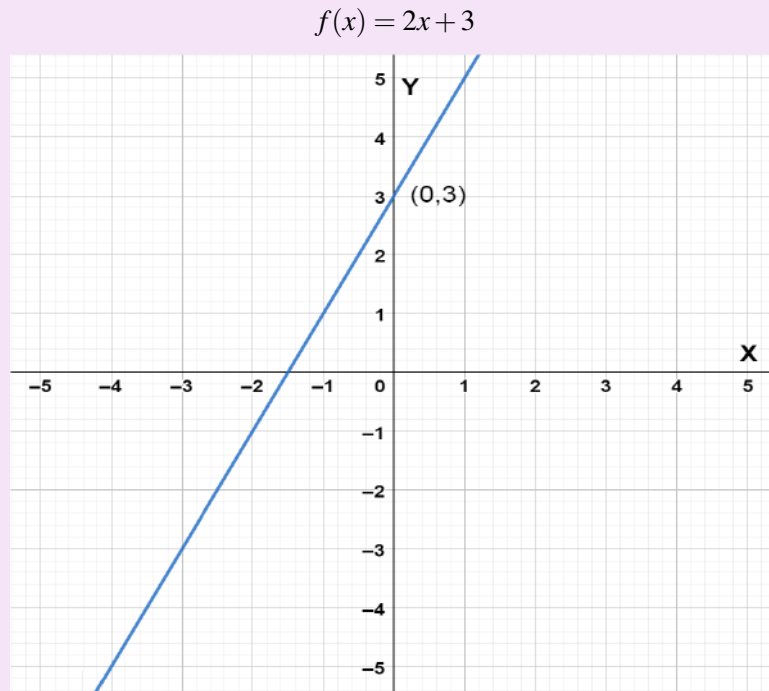


A manera de ejemplo se enuncia una función f de la siguiente manera: a todo número real le corresponde su doble aumentado en tres unidades. Algunas parejas ordenadas que podemos formar son: $(1, 5)$, $(8, 19)$, $(0, 3)$ y $(-6, -9)$. Una representación numérica se muestra en la tabla siguiente:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

La representación gráfica se muestra en la siguiente figura, además podemos indicar que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, que el dominio y el rango es el conjunto de números reales.

En forma algebraica podemos escribir:



.....

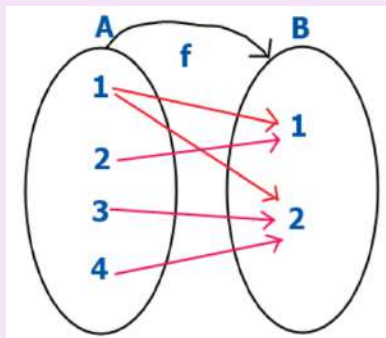
2.1 Ejercicios resueltos

1. En el conjunto de pares ordenados dado, determinar si constituyen una función o no.

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$$

Solución:

Determinamos que el dominio es el conjunto formado por los primeros elementos de las parejas, mientras que el rango lo forman los segundos elementos. Representamos la relación en la siguiente figura:



Para que la correspondencia sea una función, debe cumplirse que: a todos los elementos del dominio les corresponde una imagen en el contradominio y que dicha imagen sea única. Podemos verificar que la primera parte se cumple, pues todos los elementos de A tienen una imagen en B. Sin embargo, identificamos que $f(1) = 1$ y también $f(1) = 2$, es decir, tiene dos imágenes, por lo que el conjunto de pares ordenados que se analizan, no conforman una función.

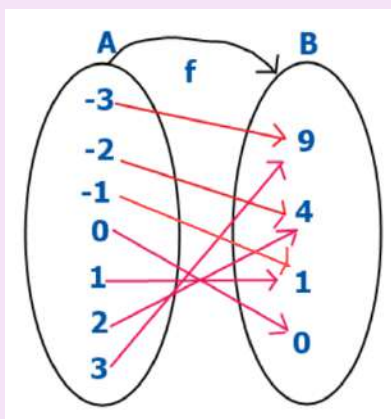
Respuesta:

Los pares ordenados no conforman una función.

.....

2. Determinar si la correspondencia que se muestra en el diagrama, representa una función.

Solución:



En la figura observamos que a todos los elementos del conjunto A le corresponde una imagen en el conjunto B. Además, identificamos que para cada elemento la imagen es única. Por lo anterior, la correspondencia es una función.

Es importante notar que a algunos elementos del dominio les corresponde la misma imagen, por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(-3) &= 9 \text{ y } f(3) = 9 & . \\ f(-2) &= 4 \text{ y } f(2) = 4 & . \\ f(-1) &= 1 \text{ y } f(1) = 1 & . \end{aligned}$$

Sugerimos investigar: ¿Qué nombre reciben las funciones en las que algunos elementos del rango son imágenes más de una vez?

Respuesta:

El diagrama si representa una función.

3. Si tenemos una función dada por $f(x) = 3x - 5$, determinar:

- a) $f(-2)$
- b) $f(1)$
- c) $f(a)$
- d) $f(x+1)$
- e) $f(2x)$

Solución:

Para resolver este ejercicio se sustituye x en la función dada, por el valor indicado.

- a) Sustituimos x por -2 : $f(-2) = 3(-2) - 5 = -11$
- b) Evaluamos la función en $x = 1$: $f(1) = 3(1) - 5 = -2$
- c) $f(a) = 3a - 5$, se obtiene al sustituir x por a
- d) Ahora sustituimos x en la función por $x + 1$:

$$f(x+1) = 3(x+1) - 5 = 3x + 3 - 5 = 3x - 2$$
- e) De forma similar, evaluamos la función en $2x$:

$$f(2x) = 3(2x) - 5 = 6x - 5$$

Respuesta:

Ra/ -11 ; Rb/ -2 ; Rc/ $3a - 5$; Rd/ $3x - 2$; Re/ $6x - 5$

.....

4. Si $f(x) = -2x^2 + x - 1$, determinar:

- a) $f(3) - f(1)$
- b) $f(h)$
- c) $f(3+h)$
- d) $f(2+h) - f(2)$

Solución:

Para resolver los ejercicios planteados debemos sustituir en la función los valores o las expresiones dadas y simplificar.

- a) $f(3) - f(1) = [-2(3)^2 + 3 - 1] - [-2(1)^2 + 1 - 1] = (-18 + 3 - 1) - (-2) = -14$
- b) $f(h) = -2h^2 + h - 1$
- c) Evaluamos f en $x = 3 + h$

$$\begin{aligned} f(3+h) &= -2(3+h)^2 + (3+h) - 1 \\ &= -2(9 + 6h + h^2) + 3 + h - 1 \\ &= -18 - 12h - 2h^2 + h + 2 \\ &= -2h^2 - 11h - 16 \end{aligned}$$

d) Evaluaremos la función en $2+h$, luego la evaluaremos en 2 y al final restamos los resultados

$$\begin{aligned} f(2+h) &= -2(2+h)^2 + (2+h) - 1 \\ &= -2(4+4h+h^2) + 2+h-1 \\ &= -8-8h-2h^2+h+1 \\ &= -2h^2-7h-7 \end{aligned}$$

Ahora para $x=2$.

$$f(2) = -2(2)^2 + 2 - 1 = -7$$

Finalmente:

$$f(2+h) - f(2) = -2h^2 - 7h - 7 - (-7) = -2h^2 - 7h$$

Respuesta:

Ra/ -14 ; Rb/ -1 ; Rc/ $-2h^2 - 11h - 16$; Rd/ $-2h^2 - 7h$

.....

5. Si $f(x) = x^3 - 2$ determinar el resultado de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si $h \neq 0$

Solución:

Procedemos a evaluar f en $x+h$, desarrollando el cubo de un binomio y simplificando la expresión:

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 2 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2$$

Efectuamos la diferencia indicada en el numerador y obtenemos

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2 - x^3 + 2 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

El cociente que se quiere determinar está dado por:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

Respuesta:

La expresión resultante es: $3x^2 + 3xh + h^2$.

.....

6. Dada $f(x) = \frac{2x-A}{3x+4}$ y $f(2) = 0.5$, determinar el valor de A .

Solución:

Puesto que conocemos el valor de la función en $x=2$, evaluamos la función en este número y resolvemos para A :

$$0.5 = \frac{2(2) - A}{3(2) + 4}$$

$$0.5 = \frac{4 - A}{6 + 4}$$

$$0.5(10) = 4 - A$$

$$A = -1$$

Respuesta:

El valor de A es -1 .

.....

7. La función $f(x) = 2x - 1$ se llama lineal y su gráfica es una recta del plano. Determinar el cociente dado por $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si $h \neq 0$, y explicar su significado.

Solución:

Empezamos por determinar una expresión para el numerador:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= [2(x+h) - 1] - (2x - 1) \\ &= 2x + 2h - 1 - 2x + 1 \\ &= 2h \end{aligned}$$

Ahora efectuamos el cociente indicado:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2 \frac{h}{h} = 2$$

Respuesta:

El valor obtenido coincide con el coeficiente de la variable x en la función lineal dada, éste es el valor de la pendiente de la recta que representa gráficamente a la función; además, el resultado de un cociente como el analizado se conoce como razón de cambio promedio de la función.

.....

8. Si $f(x) = x^2 + 3x - 4$ y $g(x) = -x + 3$, determinar una expresión para

$$[f(x) - xg(x)]^2$$

Solución:

Procedemos a sustituir las funciones f y g , luego efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos:

$$\begin{aligned}
 [f(x) - xg(x)]^2 &= [x^2 + 3x - 4 - x(-x + 3)]^2 \\
 &= [x^2 + 3x - 4 + x^2 - 3x]^2 \\
 &= (2x^2 - 4)^2 \\
 &= 4x^4 - 16x^2 + 16
 \end{aligned}$$

Respuesta:

La expresión resultante es $4x^4 - 16x^2 + 16$.

.....

9. El área de un círculo se expresa como una función del radio: $A(r) = \pi r^2$. Exprese una función para el área, cuando:

- El radio duplica su valor
- El radio se reduce en 25 %, indicando la variación que experimenta el área.

Solución:

Para resolver el ejercicio debemos comprender que se busca evaluar el área de un círculo de radio r , cuando ese valor se duplica o disminuye en 0.25 de su valor, es decir, su medida se reduce a 0.75 del valor inicial r .

$$A(2r) = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 = 4(\pi r^2)$$

Podemos observar que el área del círculo se cuadruplica cuando el radio duplica su valor.

Ahora, para el segundo caso tenemos que:

$$A(0.75r) = A\left(\frac{3}{4}r\right) = \pi\left(\frac{3}{4}r\right)^2 = \frac{9}{16}(\pi r^2)$$

En este caso, si el radio disminuye en 25 % el área disminuye en $1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \cong 0.4375$, esto es equivalente al 43.75 %.

Respuesta:

a) Al duplicarse el radio se cuadruplica el área. b) Al reducirse en 25 % el radio el área disminuye en un 43.75 %.

.....

10. Si $g(x) = 2|3x - 1|$, determinar:

- $g(-1)$
- $-g(2) + 4$
- $g(x+1)$
- $g(-x)$

Solución

Iniciamos por recordar que el valor absoluto de los números reales está dado por:

Como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) $g(-1) = 2|3(-1) - 1| = 2|-3 - 1| = 2|-4| = 2(4) = 8$

b) $-g(2) = -2|3(2) - 1| + 4 = -2|6 - 1| + 4 = -2|5| + 4 = -2(5) + 4 = -6$

c) $g(x+1) = 2|3(x+1) - 1| = 2|3x + 3 - 1| = 2|3x + 2|$

d) $g(-x) = 2|3(-x) - 1| = 2|-3x - 1|$

Respuesta:

Ra/ 8; Rb/ -6; Rc/ $2|3x + 2|$; Rd/ $2|-3x - 1|$

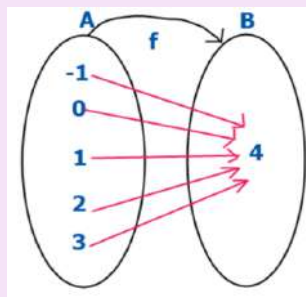
.....

2.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. En el conjunto de pares ordenados dado, determinar si constituyen una función o no.
 $\{(3,3), (4,3), (5,4), (6,5)\}$

R / Si es una función

2. Determinar si la correspondencia que se muestra en la figura representa una función.



R/ Si es una función

3. Si $f(x) = -2x + 7$, evaluar f en los valores indicados:
- a) $f(-1.5 + 7)$
 - e) $f(0)$
 - c) $f(-k)$
 - d) $-f(x)$
 - e) $f(2 - x)$

Ra/ 10; Rb/ 7; Rc/ $2k + 7$; Rd/ $2x - 7$; Re/ $2x + 3$

4. Dada $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$, determinar:

a) $f(-1)$
 b) $f(2x)$
 c) $f(4+h)$
 d) $f(3+h) - f(3)$

Ra/ -3 ; Rb/ $12x^2 + 4x - 4$; Rc/ $3h^2 + 26h + 52$; Rd/ $3h^2 + 20h$

5. Si $f(x) = 3 + x^3$, determinar una expresión para el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

R/ $3x^2 + 3xh + h^2$

6. Dada $f(x) = \frac{(3x+8)}{(2x-B)}$ y $f(0) = 2$, determinar el valor de B .

R/ $B = -4$

7. Dada la función $f(x) = 3x - 6$, determinar el cociente dado por $\frac{f(9) - f(4)}{(9-4)}$ y explicar su significado.

R/ 3, corresponde a la pendiente de la recta que representa la función dada.

8. Si $f(x) = -x + 3$ y $g(x) = x^2 + 3x - 4$, determinar una expresión para $[xf(x) + g(x)]^2$

R/ $36x^2 - 48x + 16$.

9. El volumen de una esfera es una función del radio, dada por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Determinar cuál es la variación del volumen si el radio de la esfera a) Se duplica b) Disminuye en 50%.

Ra/ V se incrementa 8 veces. Rb/ V disminuya a un octavo de su valor.

10. Si $h(x) = 3|2 - 5x|$, determinar:

a) $h(0) - h(1)$
 b) $h(-2) - 1$
 c) $2h(-x)$

Ra/ -3 ; Rb/ 35 ; Rc/ $6|2 + 5x|$



3. Gráficas de funciones

Las gráficas de las funciones son muy útiles para analizar la conducta de las variables en estudio, aunque existen muchas herramientas tecnológicas para su elaboración, es importante conocer algunos principios básicos de graficación.

La gráfica de una función $f : A \rightarrow B$ se define como el conjunto de puntos del plano (x, y) , entendiéndose que $x \in A$, $y \in B$.

Las representaciones gráficas son importantes porque permiten visualizar el comportamiento de una función e identificar aspectos como valor máximo o valor mínimo, intervalos donde la función crece o decrece, dominio y rango, intersecciones con los ejes coordenados, simetrías y otras características.

Como punto de partida, es fundamental tener presente que **no todas las gráficas representan funciones**, para identificar las que sí corresponden a una función es muy útil el siguiente criterio:

Prueba de la recta vertical

Una gráfica en el plano cartesiano representa una función si y sólo si, ninguna recta vertical la intersecta más de una vez.

Esta prueba se basa en la comprobación de que a cada valor de x en el dominio de la función, le corresponde una única imagen en el contradominio, por tal razón si una recta vertical intersecta una gráfica más de una vez, esto significa que algún valor de x tiene más de una imagen y por ello no representa una función.

Gráficas básicas de funciones**a) Función constante**

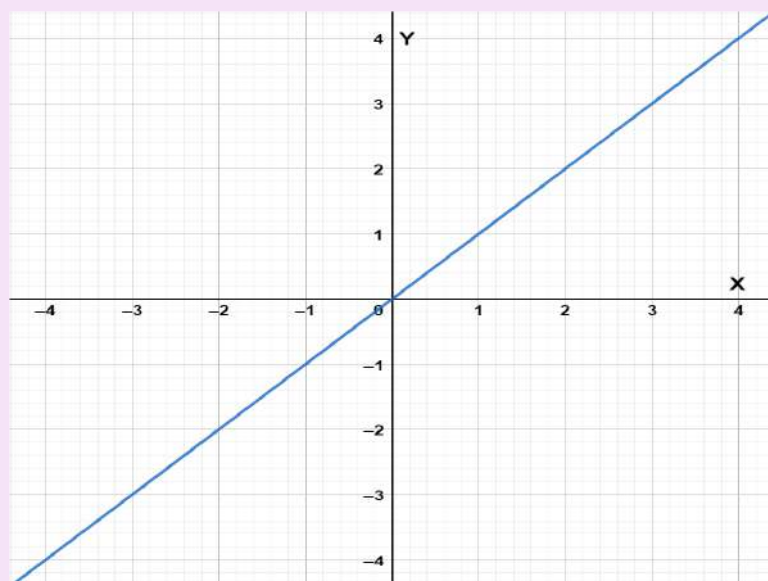
En algunas situaciones se observa que para un conjunto de valores posibles de una variable la imagen es la misma. Por ejemplo, una empresa entrega paquetes en la ciudad capital, con un peso máximo de 5 libras y un costo de 100.00 por envío. El precio en función de peso x se describe como:

$$f(x) = 100, \text{ para } 0 < x \leq 5$$

En forma general, $f(x) = c$, donde c es una constante. Su representación gráfica es una recta horizontal de la forma $y = c$, como ejemplo se muestra $y = 2$, para todos los números reales.

**b) Función identidad**

Se genera al asociar con número real una imagen igual a su valor, es decir, $f(x) = x$. Podemos denotarlo por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Su representación gráfica se muestra en la siguiente figura.

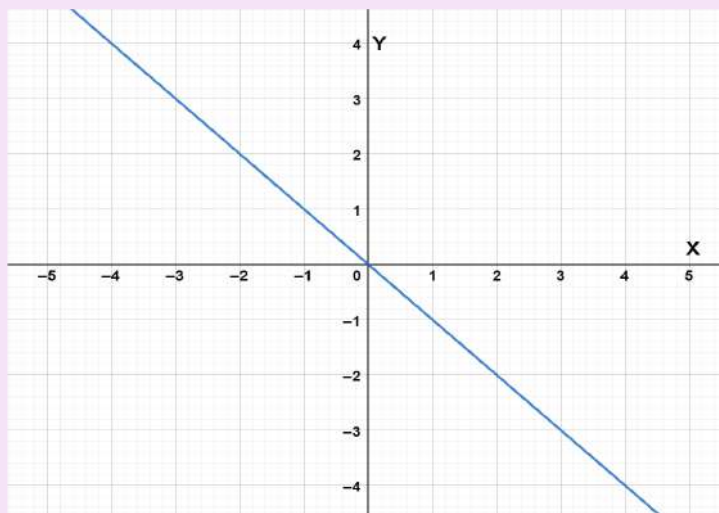


Aprovechamos esta función para explorar la función dada por $f(x) = -x$, la que asigna como imagen a cada valor de x , el simétrico aditivo de un número real. En la tabla siguiente se muestran algunas parejas de valores, a partir de la cual se esboza la gráfica que se muestra.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = -x$$



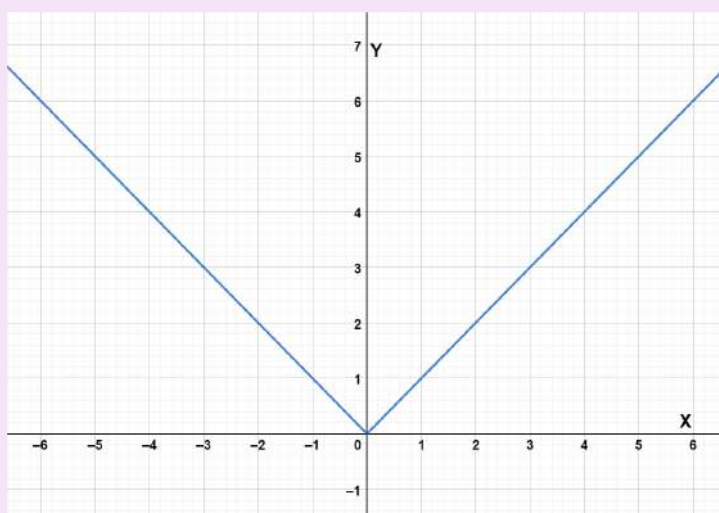
c) Función valor absoluto

Esta función está definida para todos los números reales de la siguiente forma:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Presentamos una tabla con algunos valores que permiten trazar una gráfica como la que se muestra.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

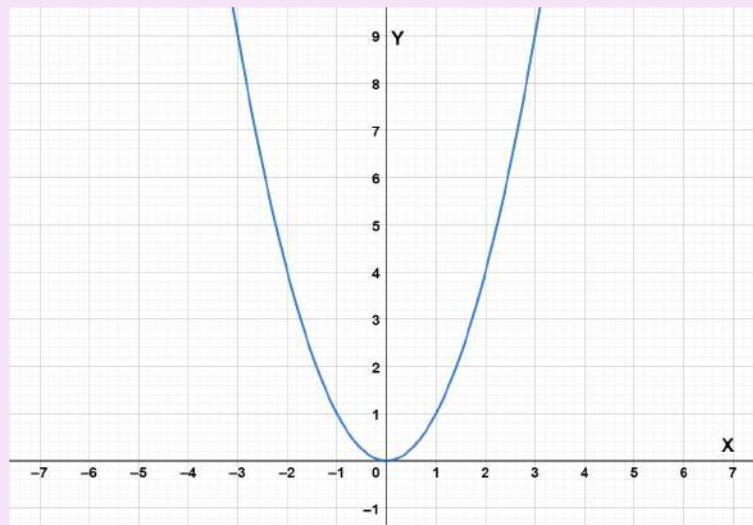


d) Función cuadrática

Esta función asigna a un número real una imagen dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a , b y c números reales, $a \neq 0$. El caso más conocido corresponde a valores de $a = 1$, $b = c = 0$, es decir, $f(x) = x^2$. Algunos valores son:

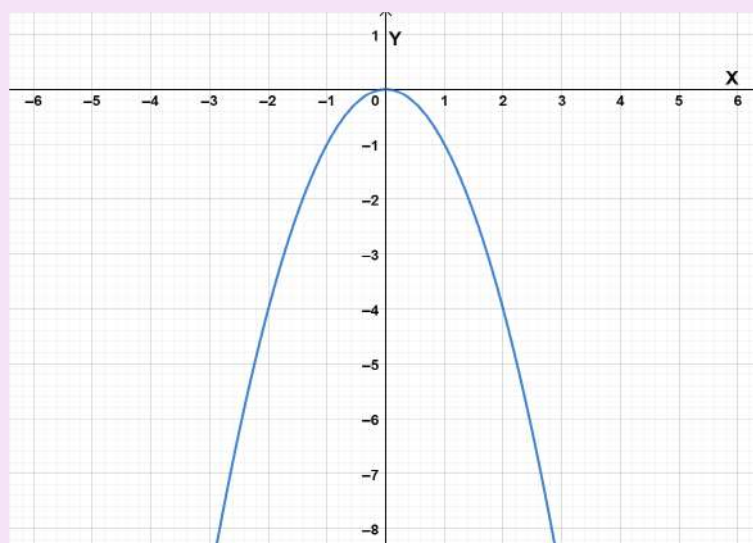
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Podemos notar que el dominio es $\mathbb{R}$ mientras que el rango está formado por los números mayores o iguales que cero. La gráfica es una parábola que abre hacia arriba, con vértice en el origen y simétrica con respecto al eje Y.



Otro caso importante es el de $f(x) = -x^2$, para el que presentamos una tabla y su representación gráfica que corresponde a una parábola que abre hacia abajo, también con vértice en el origen y simétrica con respecto al eje Y.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



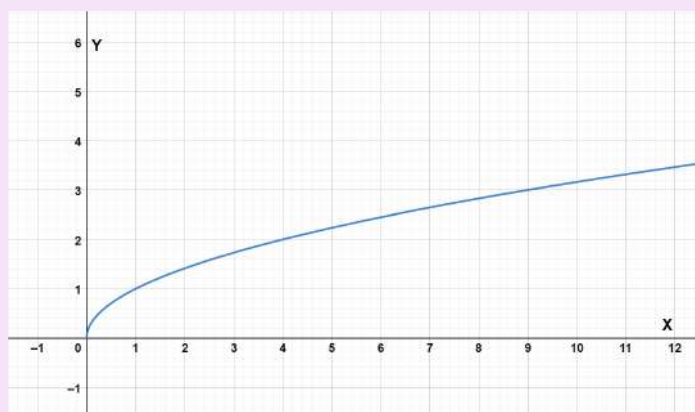
e) Función Raíz Cuadrada

Para definir funciones que involucran raíces cuadradas es necesario tener presente que la expresión subradical debe tomar valores iguales o mayores que cero.

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ requiere que } x \geq 0$$

esto significa que el dominio de la función es el conjunto $[0, \infty)$. A continuación presentamos una tabla con algunos valores y su representación gráfica.

x	0	1	2	3	4	9
y	0	1	1.41	1.73	2	3



Podemos observar que el rango está dado por el conjunto $[0, \infty)$.

Para profundizar en el aprendizaje, formulamos la siguiente interrogante: ¿Cómo son las gráficas de

$$f(x) = -\sqrt{x} \text{ y de } f(x) = \sqrt{-x}?$$

En el caso de $f(x) = -\sqrt{x}$, lo que debemos deducir es que los valores de y cambian de signo, es decir, serán todos negativos y la gráfica será un reflejo de la gráfica anterior con respecto al eje X , como se muestra en la figura siguiente. El dominio es $[0, \infty)$ mientras que el rango está dado por el conjunto $(-\infty, 0]$.



Para el segundo caso en que la función es $f(x) = \sqrt{-x}$, consideramos que $-x \geq 0$ o sea $x \leq 0$. Así que el dominio está dado por el conjunto: $(-\infty, 0]$. Veamos algunos valores:

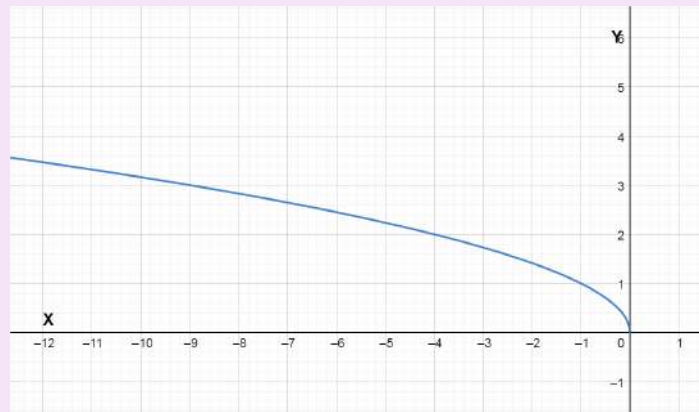
$$f(-9) = \sqrt{-(-9)} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(-4) = \sqrt{-(-4)} = \sqrt{4} = 2$$

$$f(-1) = \sqrt{-(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(0) = \sqrt{-(-0)} = \sqrt{0} = 0$$

La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Al comparar esta gráfica con la de $f(x) = \sqrt{x}$ identificamos que se generó una reflexión con respecto al eje Y.

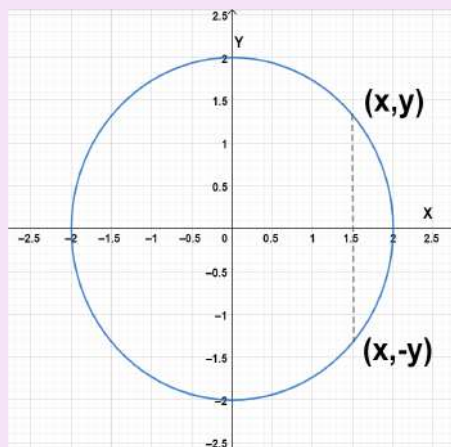
Los ejemplos analizados muestran la conveniencia de contar con definiciones y criterios para identificar la simetría de una gráfica, incluso antes de trazarla; éstos se presentan a continuación.

- Una gráfica es simétrica con respecto al eje Y si se verifica lo siguiente: si el punto (x,y) está en la gráfica entonces el punto $(-x,y)$ también pertenece a la gráfica. Esta definición significa que al sustituir x por $-x$ en la expresión, se obtiene otra equivalente. Un ejemplo de este tipo de simetría es el de $f(x) = x^2$, ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.
- Una gráfica es simétrica con respecto al eje X si cuando el punto (x,y) pertenece a la gráfica, entonces el punto $(x,-y)$ también pertenece a la gráfica.

Un ejemplo de este tipo de gráficas es la que se muestra en la figura, en ella podemos notar que el punto (x,y) pertenece a la gráfica y también el punto $(x,-y)$.

Además, observamos que esta gráfica también es simétrica con respecto al eje "y"

$$x^2 + y^2 = 4$$



- b) Una gráfica es simétrica con respecto al origen si cuando la gráfica pasa por el punto (x,y) también pasa por el punto $(-x, -y)$. Esto significa que al sustituir en la expresión x por $-x$ y a la vez cambiar y por $-y$, la expresión resultante es equivalente. Como ejemplo consideremos $f(x) = x^3$

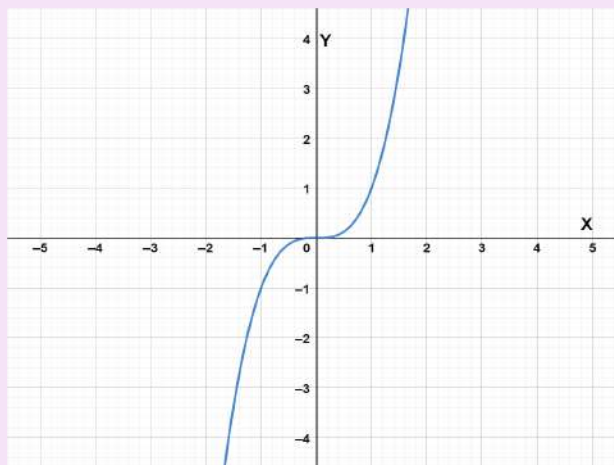
$$y = x^3$$

$$-y = (-x)^3$$

$$-y = -x^3$$

$$y = x^3$$

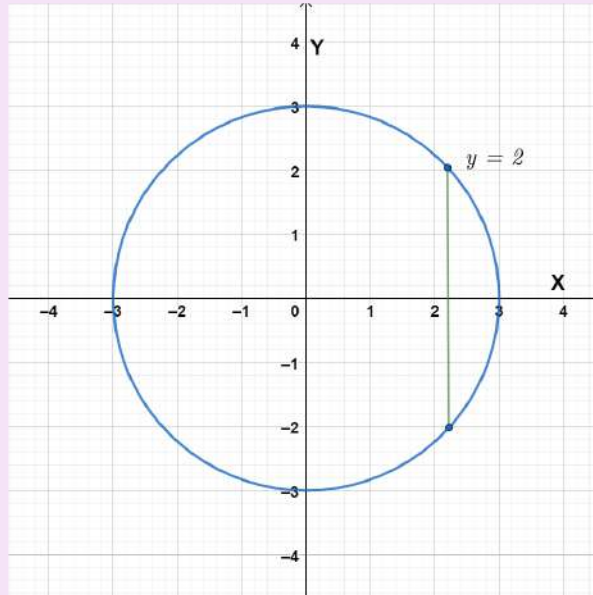
La gráfica asociada es:



A las funciones cuyas gráficas son simétricas con respecto al eje Y se les llama **funciones pares**, esto significa que $f(-x) = f(x)$, mientras que las funciones cuyas gráficas son simétricas con respecto al eje X, se conocen como **funciones impares**, esto equivale a: $f(-x) = -f(x)$.

3.1 Ejercicios resueltos

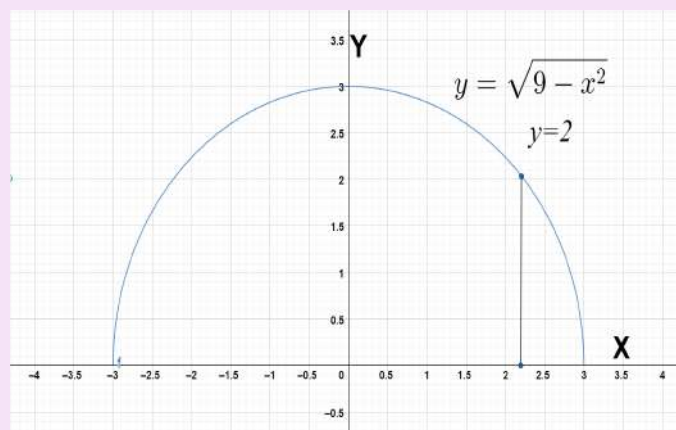
1. Determinar si la gráfica mostrada corresponde a una función, explicar la respuesta.

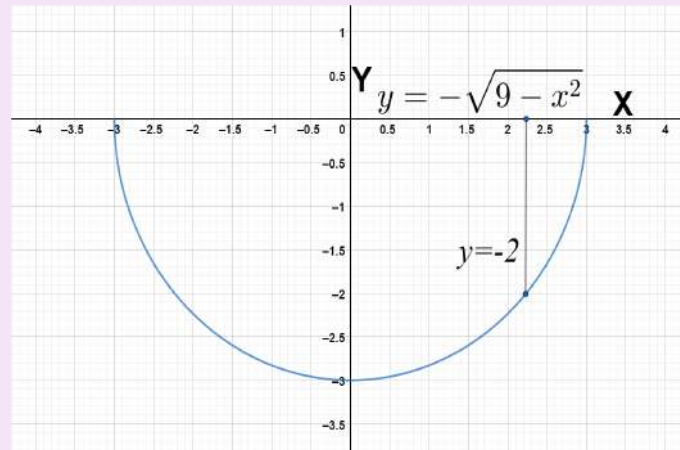


Solución

Al trazar una recta vertical sobre la gráfica dada, observamos que la interseca en más de un punto, esto significa que algún valor de x tiene dos imágenes diferentes, por lo que no corresponde a una función.

Si a partir de esta gráfica se busca generar funciones, podemos hacerlo considerando solo las imágenes positivas o solamente las imágenes negativas como en las figuras que presentamos.



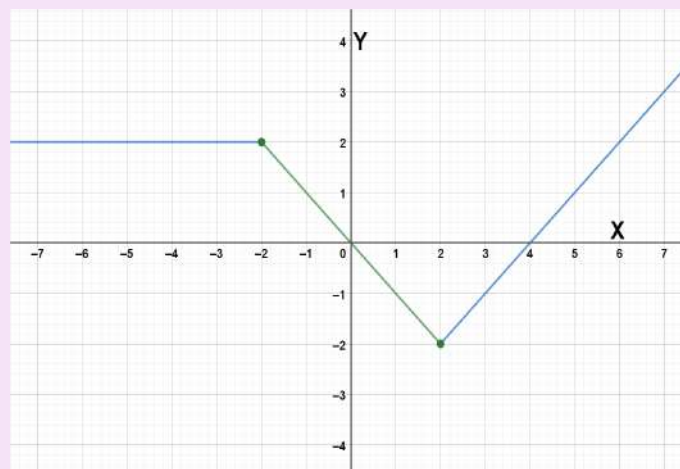


2. Ubicar en el plano cartesiano los puntos dados en la tabla, trazar la gráfica y determinar si corresponde a una función. Si lo es, determinar una expresión para las diferentes partes.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	2	2	2	2	1	0	-1	-2	-1	0

Solución:

Al ubicar los puntos dados en el plano cartesiano obtenemos la siguiente gráfica.



Al analizar la gráfica se identifican tres comportamientos diferentes en los intervalos dados por : $x \leq -2$, $-2 < x < 2$, $x \geq 2$. Si trazamos una recta vertical en los diferentes tramos, comprobamos que intersecta la gráfica una sola vez, por lo que podemos afirmar que corresponde a una función. Dicha función es constante en la primera parte, decrece en la segunda y crece en la tercera.

Podemos identificar que si $x \leq -2$, entonces $f(x) = 2$.

En el intervalo dado por $-2 < x < 2$, podemos establecer que la gráfica corresponde a una de las funciones estudiadas al inicio: $f(x) = -x$

El tercer tramo la gráfica corta el eje X en $x = 4$, por lo que $f(x) = x - 4$.

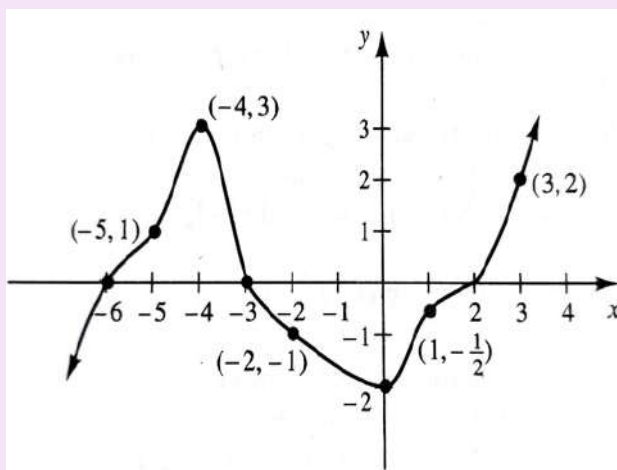
De forma resumida, expresamos f como una función por partes.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ -x & \text{si } -2 < x < 2 \\ x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

.....

3. Con base en la gráfica que se muestra para $g(x)$ determinar:

- a) $g(-5)$, $g(0)$ y $g(1) + g(3)$
 b) Los ceros de $g(x)$ e intervalos para $g(x) > 0$ y $g(x) < 0$



Solución:

a) En gráfica observamos que $g(-5) = 1$, $g(0) = -2$, $g(1) + g(3) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.

b) Los ceros o raíces de f corresponden a los valores de x en los que $g(x) = 0$, estos son los valores de x en que la gráfica atraviesa el eje X. Notamos que $g(-6) = 0$, $g(-3) = 0$ y $g(2) = 0$. Así que las raíces de g son: $x = -6$, $x = -3$ y $x = 2$.

Los intervalos donde g es menor que cero o negativa son aquellos en los que la gráfica se ubica en el lado negativo del eje Y, así como los intervalos en los que g es mayor que cero son los intervalos en los que la gráfica se ubica en la parte positiva del eje Y.

$$g(x) > 0 \text{ en } (-6, -3) \text{ y } (2, \infty)$$

$$g(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -6) \text{ y } (-3, 2)$$

.....

4. Trazar la gráfica de la función dada y determinar su dominio y rango.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

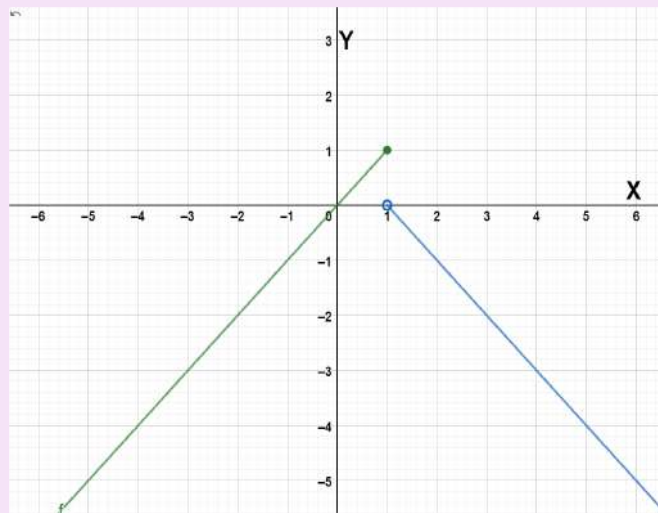
Solución:

En este ejercicio la función dada consta de dos partes, tramos o trozos. El valor de $x = 1$ separa los intervalos en los cuales se diferencia el comportamiento de la función. En el primer intervalo la función es la identidad, para lo cual determinamos algunos valores:

$$f(1) = 1, f(0) = 0, f(-2) = -2, f(-5) = -5$$

En el segundo tramo $f(x) = 1 - x$ para valores mayores que 1, algunos valores de f son: $f(2) = 2 - 1 = 1$, $f(5) = 5 - 1 = 4$, $f(1)$ sería $1 - 1 = 0$ pero lo dejamos abierto pues 1 pertenece al intervalo anterior.

La gráfica de f se muestra a continuación y a partir de ella se deduce el dominio y rango.



Para determinar el dominio nos centramos en los valores que toma x mientras que para el rango analizamos los valores de y . Así, el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es el conjunto $(-\infty, 1]$.

Respuesta:

Rb/ Dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\infty, 1]$.

.....

5. Una función g se define como

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

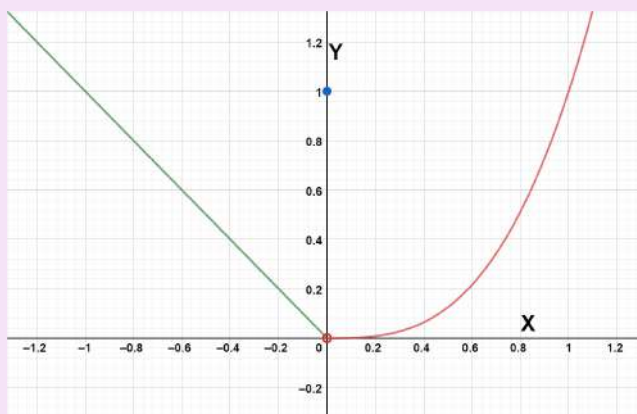
- Trazar la gráfica de g . Determinar su dominio y rango.
- Calcular $-2g(-1) + 3g(1)$.

Solución:

a) Al analizar la función dada notamos que está formada por tres partes: el valor absoluto para todos los números negativos, 1 para cero y el cubo de los números positivos. Podemos recurrir a elaborar una tabla con algunos valores para ubicar puntos en el plano cartesiano y a partir de ello elaborar la gráfica.

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	4	3	2	1	1	1	8	27

El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango $(0, \infty)$



b) Determinamos que $g(-1) = 1$ y $g(1) = 1$, entonces:

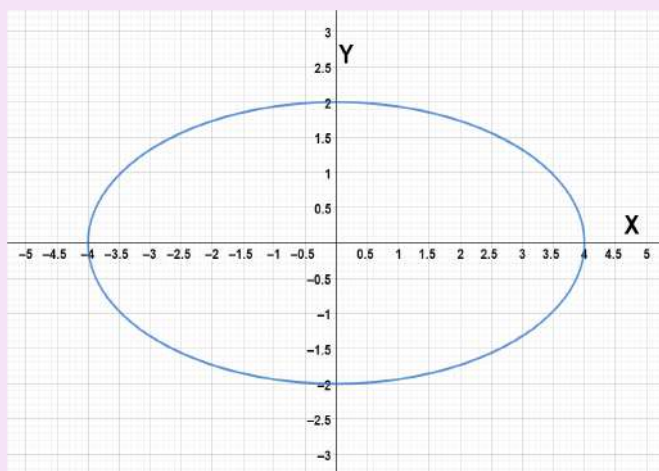
$$-2g(-1) + 3g(1) = -2(1) + 3(1) = -2 + 3 = 1$$

Respuesta:

Ra/ Dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Rb/ 1.

3.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. Determinar si la gráfica mostrada representa una función, explicar la respuesta.



R/ No es función, pues una recta vertical la interseca más de una vez.

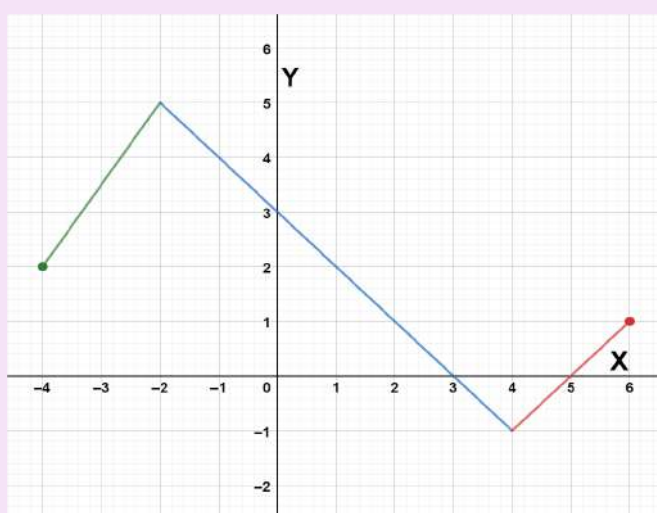
2. Ubicar en el plano cartesiano los puntos indicados en la tabla.
- Graficar y determinar si la gráfica corresponde a una función.
 - Si lo es, determinar una expresión para la función f .

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	4.9	5	6	7
y	9	4	1	0	1	2	3	4	4.9	2	2	2

Rb/ La función por partes es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 5 \\ 2 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

3. A partir de la gráfica de la función h , determinar:
- $h(-2)$, $h(0)$, $h(4) - h(-4)$
 - Intervalos en los que $h(x) > 0$ y en los que $h(x) < 0$. Ceros de la función.
 - Dominio y rango de la función.



Respuestas:

- $h(-2) = 5$, $h(0) = 3$ y $h(4) - h(-4) = -1 - (2) = -3$
 - $h(x) > 0$ en $[-4, 3)$ y $(5, 6]$; $h(x) < 0$ en $(3, 5)$ y $h(x) = 0$ en $x = 3$ y $x = 5$.
 - Dominio: $[-4, 6]$. Rango: $[-1, 5]$
4. Trace la gráfica de la función dada y determine su dominio y contradominio.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

R/El dominio de la función son los números reales. Dominio: $\mathbb{R}$. Rango: $[1, \infty)$

5. La función h se define como:

$$h(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Trazar la gráfica de h
 - b) Determinar su dominio y rango.
- Rb/ Dominio:** $[-3, \infty)$. **Rango :** $[0, \infty$

4. Funciones y modelos lineales

4.1 Funciones lineales

Una función lineal está definida por una expresión de la forma

$$f(x) = ax + b, \text{ donde } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta en el plano con pendiente a e intercepto en origen b .

Su dominio natural es el conjunto de números reales así como su rango, lo podemos denotar así:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = ax + b$$

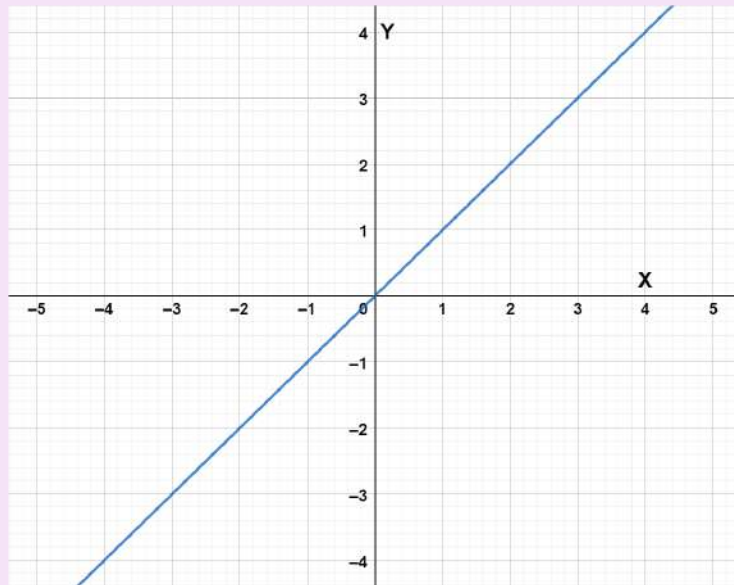
La pendiente de la recta que corresponde a una función lineal, expresa una razón de cambio promedio y puesto en este caso es una constante, algunos autores la denominan solamente razón de cambio.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En términos gráficos, para representar una recta son necesarios y suficientes dos puntos cualesquiera, pero una buena opción es identificar los puntos donde la recta intersecta los ejes cartesianos, es decir,

$$f(x) = 0 \text{ y } f(0) = b$$

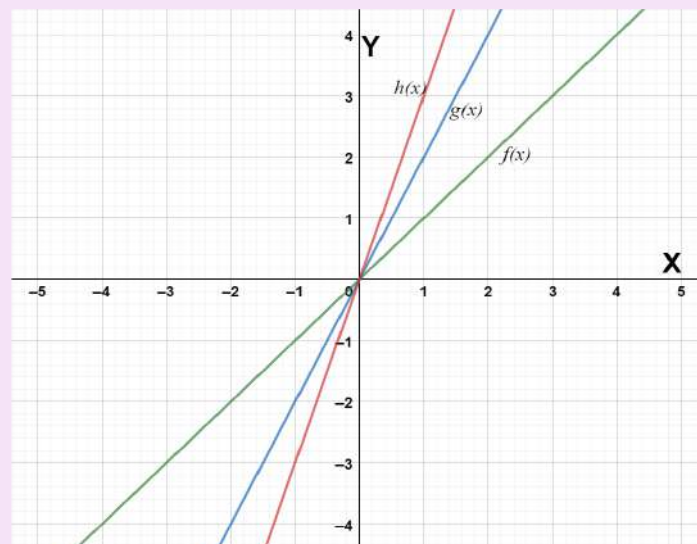
Si en una función lineal se tiene que $a = 1$ y $b = 0$, la gráfica es una recta que pasa por el origen y se define como $f(x) = x$, es decir, coincide con la función identidad, como se muestra en la siguiente figura.



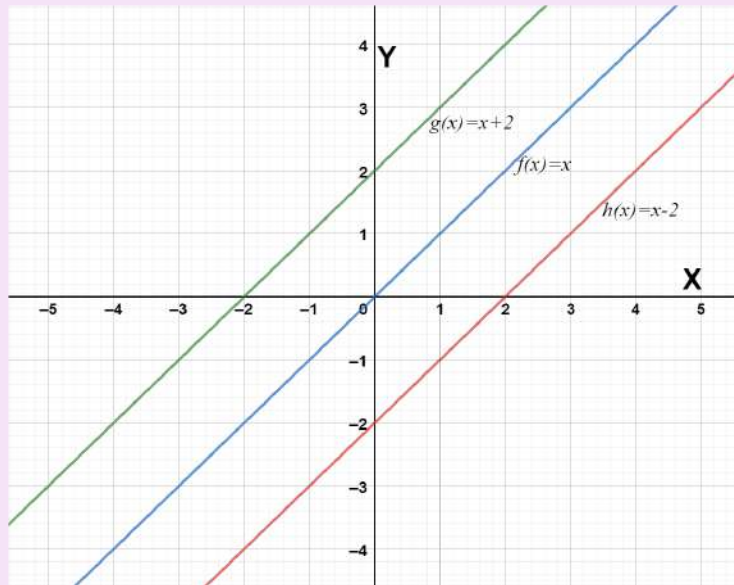
Si hacemos variar la pendiente a , por ejemplo, $a = 2$ y $a = 3$, generamos funciones de la forma

$$g(x) = 2x \text{ y } h(x) = 3x$$

Las gráficas se muestran a continuación:



Los efectos de la variación de b , se muestran en la siguiente figura en la que podemos observar que la gráfica de $f(x) = x$ se desplaza dos unidades hacia arriba cuando graficamos $g(x) = x + 2$, mientras que para el caso de $h(x) = x - 2$ el desplazamiento vertical es de dos unidades hacia abajo.



4.1.1 Ejercicios resueltos

1. Si $f(x)$ es una función lineal cuya grafica pasa por los puntos $P(2,5)$ y $Q(6,3)$, determinar:

- Los puntos en los que interseca al eje x y al eje y
- Gráfica de la función.

Solución:

Como la función es lineal, tiene la forma

$$f(x) = ax + b$$

Para determinar el valor de a , usamos la información dada por los puntos P y Q

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{6 - 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos a en la función que buscamos

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + b$$

Para determinar el valor de b , evaluamos la función en un punto por el cual pase al grafica, por ejemplo P , en el cual $f(2) = 5$. Así,

$$5 = -\frac{1}{2}(2) + b$$

$$5 = -1 + b$$

$$b = 6$$

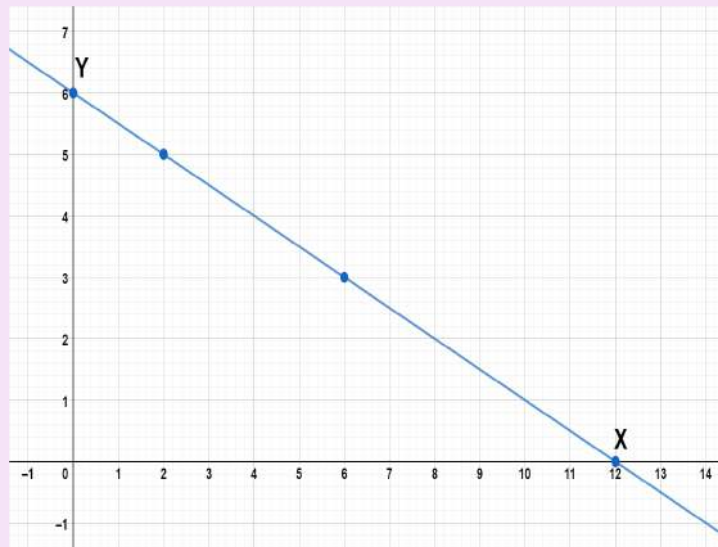
La función lineal es: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$. La gráfica interseca al eje Y en el punto $(0,6)$, mientras que la intersección con el eje X ocurre en el punto en el que $f(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}x + 6 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 6$$

$$x = 12$$

El punto de intersección con el eje X es $(12,0)$. La gráfica es:

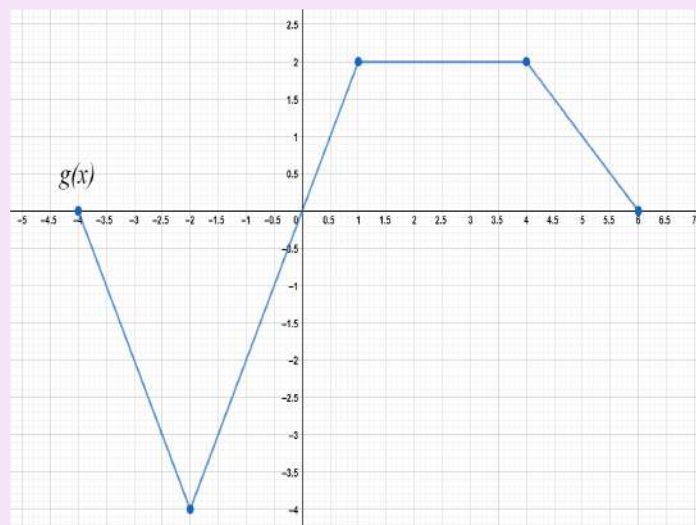


Respuesta:

Ra/ Intersecta el eje X en $(12,0)$ e intersecta el eje Y en $(0,6)$.

.....

2. En la gráfica se muestra el comportamiento de una función por partes $g(x)$. Determinar una expresión para g



Solución:

Al observar la grafica identificamos tres partes que corresponden a funciones lineales y una que es una función constante.

Inicialmente podemos escribir:

$$g(x) = \begin{cases} \text{lineal} & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ \text{lineal} & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \text{constante} & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ \text{lineal} & \text{si } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Parte 1: en $-4 \leq x \leq -2$

$g(x) = ax + b$. La gráfica pasa por $(-4,0)$ y $(-2,-4)$, por la inclinación de la recta $a < 0$. Calculamos:

$$a = \frac{-4 - 0}{-2 - (-4)} = \frac{-4}{-2 + 4} = -\frac{4}{2} = -2$$

$g(x) = -2x + b$. Evaluamos en $(-4,0)$ para determinar b :

$$0 = -2(-4) + b$$

$$b = 8$$

$$g(x) = -2x - 8$$

Parte 2: en $f(x) = ax + b$, la gráfica pasa por los puntos $(-2,-4)$, $(0,0)$ y $(1,3)$, por la inclinación de la recta, $a > 0$. Calculamos:

$$a = \frac{3 - 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

$g(x) = 3x + b$. Valuamos en $(0,0)$

$$0 = 0 + b$$

$b = 0$, como corresponde a una recta que pasa por el origen.

$$g(x) = 3x$$

Parte 3: en $1 \leq x \leq 4$

La función constante es $g(x) = 2$

Parte 4: en $4 < x \leq 6$

$g(x) = ax + b$, la gráfica pasa por los puntos $(4,2)$ y $(6,0)$

$$a = \frac{0 - 2}{6 - 4} = \frac{-2}{2} = -1$$

$g(x) = -x + b$, Evaluamos en el punto (6,0)

$$0 = -6 + b$$

$$b = 6$$

$$g(x) = -x + 6$$

La función representada en la gráfica es:

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ 3x & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ -x + 6 & \text{si } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

.....

3. La razón de cambio promedio de una función lineal es de $\frac{3}{5}$ e intercepta al eje X en 3.

- a) Determinar el valor de $f(-2)$
- b) Determinar x para que $f(x) = 3$

Solución:

a) La función lineal que se describe es de la forma $f(x) = ax + b$. La razón de cambio promedio coincide con el valor de la pendiente de la recta, así se obtiene:

$$f(x) = \frac{3}{5}x + b$$

Dado que la gráfica intersecta al eje X en 3, entonces el punto (3,0) pertenece a la recta, es decir $f(3) = 0$. Evaluamos la función en ese punto para calcular b

$$\frac{3}{5}(3) + b = 0$$

$$b = -\frac{9}{5}$$

La función lineal es entonces:

$$f(x) = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$$

Valuando en -2 , obtenemos:

$$f(-2) = \frac{3}{5}(-2) - \frac{9}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{9}{5} = \frac{15}{5} = -3$$

b) Se requiere determinar el valor de x para que $f(x) = 3$, por lo que tendremos lo siguiente:

$$3 = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$3 = \frac{3x - 9}{5}$$

$$15 = 3x - 9$$

$$3x = 24$$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Respuesta:

Ra/ El valor de $f(-2)$ es igual a -3 .

Rb/ El valor de x para que $f(x) = 3$ es 8.

.....

4. Un plan de telefonía celular cuesta Q300.00 mensuales. Incluye 350 minutos a cualquier operador más Q0.25 por minuto adicional. La función que utilizan para el cobro mensual a los usuarios por el consumo de x minutos es:

$$C(x) = \begin{cases} 300 & \text{si } 0 \leq x \leq 350 \\ 0.25x + 212.5 & \text{si } x > 350 \end{cases}$$

Calcular cuánto paga un usuario que consume:

- 200 minutos, 500 minutos.
- Si el monto de una factura es de Q.325.00, ¿cuántos minutos utilizó el usuario?

Solución:

Antes de realizar los cálculos indicados, es importante comprender la función para el cobro.

La primera parte es totalmente comprensible pues el plan consiste en un pago de Q300 por el consumo de un máximo de 350 minutos.

La segunda parte expresa que si el consumo es mayor de 350 minutos, se pagan 25 centavos por cada minuto adicional, es decir $C = 300 + 0.25x$ minutos adicionales a 350. Si x es el total de minutos consumidos $x - 350$ representa los minutos adicionales por ello el pago es:

$$C = 300 + 0.25(x - 350)$$

$$C = 300 + 0.25x - 87.50$$

$$C = 0.25x + 212.50$$

Ahora ya podemos calcular lo indicado.

a) Si $x = 200$ minutos dado que es menor que 350 entonces el usuario paga Q300.00.

Si $x = 500$ minutos, dado que es mayor a 350, el pago es:

$$C = 0.25(500) + 212.50 = 337.50$$

b) Dado que el pago es mayor a Q300.00 se deduce que el consumo fue mayor de 350 minutos. La tarifa aplicada se igualará entonces a Q325.00:

$$325 = 0.25x + 212.50$$

$$325 - 212.50 = 0.25x$$

$$112.50 = 0.25x$$

$$x = \frac{112.50}{0.25} = 450$$

Respuesta:

Ra/ Al consumir 200 minutos, paga Q300.00, al consumir 500 minutos paga Q337.50.

Rb/ El número de minutos consumidos al pagar Q325.00 es de 450.

.....

5. Dos escalas conocidas para medir la temperatura son la Celsius y la Fahrenheit. La relación entre ellas es una función lineal dada por:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

- Si en la escala Celsius el punto de congelación del agua es de 0 grados y el de ebullición es de 100 grados a una presión atmosférica estándar. Determinar la temperatura de congelación y ebullición del agua en la escala Fahrenheit.
- ¿A qué temperatura en grados Celsius corresponden 100°F?

Solución:

a) Se requiere determinar $F(0)$ y $F(100)$:

Congelación del agua:

$$F = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$$

Ebullición del agua:

$$F = \frac{9}{5}(100) + 32 = 9(20) + 32$$

$$F = 180 + 32 = 212$$

b) Al conocer una temperatura en la escala Fahrenheit ahora debemos buscar su equivalente en Celsius

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$F - 32 = \frac{9}{5}C$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Si $F = 100$ entonces la temperatura en grados Celsius es:

$$C = \frac{5}{9}(100 - 32) = \frac{5}{9}(68) = 37.78$$

Respuesta:

Ra/ La temperatura de congelación del agua es 32°F y la temperatura de ebullición es de 212°F .

Rb/ La temperatura equivalente a 100°F es de 37.78°C

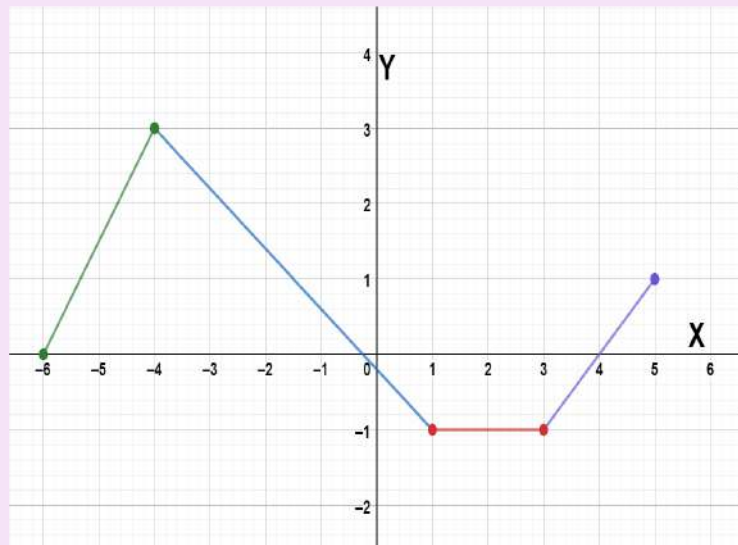
.....

4.1.2 Ejercicios para la autoevaluación

- Determinar una función lineal en la que $f(2) = 3$ y $f(-1) = -4$, identificar los puntos de intersección con los ejes y graficar.

Ra/ $f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$; **Rb/ Intersecta a al eje Y en $-\frac{5}{3}$ y al eje X en $\frac{5}{7}$**

- Encontrar una expresión para la función por partes que se muestra en la figura.



R/

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 9 & \text{si } -6 \leq x \leq -4 \\ -\frac{4}{5}x - \frac{1}{5} & \text{si } -4 < x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

3. Si la gráfica de una función lineal intersecta al eje X en -2 y la razón de cambio promedio es de $-\frac{3}{2}$, determinar:
- $f(5)$
 - El valor de x para que $f(x) = -2$

$$\text{Ra/ } -\frac{21}{2}; \text{ Rb/ } x = -\frac{2}{3}$$

4. Una empresa de envíos de correspondencia en bicicleta, acepta un peso máximo de 12 onzas por envío. Si x es el peso en onzas de los envíos, el costo está dado por:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 10 + 3(x - 5) & \text{si } 5 < x \leq 12 \end{cases}$$

Determinar:

- El costo de envío de un sobre que pesa 3 onzas.
- El peso de un documento por el que se pagaron Q.25.00

Ra/ Q.10.00; Rb/ 10 onzas.

5. Una piscina de dimensiones 50 metros de largo por 25 metros de ancho y dos metros de profundidad está llena y debe ser vaciada por una bomba que puede extraer $100m^3$ de agua por hora. El volumen de agua que queda en la piscina puede calcularse por la función lineal:

$$V(t) = 2500 - 100t$$

Determinar:

- El tiempo necesario para vaciar la piscina.
- ¿Cuál es el volumen de agua extraído después de 8 horas?

Ra/ 25 horas; Rb/ $800 m^3$

.....

4.2 Modelos lineales

Los modelos lineales se entienden como funciones lineales que se ajustan en buena medida para descubrir el comportamiento de algunos fenómenos. La estrategia principal consiste en identificar las relaciones entre las variables de interés para expresar una función de la forma general $f(x) = ax + b$.

4.2.1 Ejercicios resueltos

- El empleado de una tienda de electrodomésticos recibe un salario base mensual de Q3500.00 más una comisión del 10 % de las ventas que realice.
 - Formular una función línea para el salario mensual.
 - Si el empleado tiene como meta alcanzar un salario mensual de Q8000.00, ¿cuál es el monto de ventas que debe realizar?

Solución:

- a) Denotamos como x el monto de las ventas mensuales y $S(x)$ el salario mensual.

$$S(x) = 3500 + 0.1x$$

- b) Debemos determinar las ventas mensuales x para que $S(x) = 8000$.

$$0.1x + 3500 = 8000$$

$$0.1x = 8000 - 3500 = 4500$$

$$x = \frac{45000}{0.1} = 4500$$

Respuesta:

Si el empleado quiere obtener Q8000.00 de salario mensual, debe realizar ventas para un monto de Q45000.00

.....

2. En una ciudad el promedio de temperatura fue de 17.5 °C en 1920, con una razón de cambio promedio de 0.035 °C por año.

- a) Si la temperatura está linealmente asociada con el tiempo y 1920 corresponde a $t = 0$, expresar T en función del tiempo.
- b) Estimar la temperatura en 2020.

Solución:

- a) El enunciado indica que, en 1920, $t = 0$ y $T = 17.5$ °C.

La razón de cambio promedio coincide con el valor de la pendiente de la recta que representa la función, es decir, $a = 0.035$.

El modelo lineal buscado es:

$$T(t) = 0.035t + 17.5$$

- b) En el año 2020 $t = 100$, por lo que evaluamos el modelo con este valor

$$T(100) = 0.035 * 100 + 17.5 = 21$$

Respuesta:

Ra/ $0.035t + 17.5$; Rb/ 21°C

.....

3. Una distribuidora de zapatos debe pagar mensualmente Q8000.00 por derechos de marca, mas 5 % de los ingresos mensuales I . Los gastos administrativos son de Q5000 de gastos fijos y 25 % del ingreso para pago de personal.

- a) Determinar el gasto mensual g en términos de I .
- b) Expresar la ganancia mensual G en términos del ingreso I .
- c) Determinar cuál es el monto del ingreso mensual para obtener una ganancia de Q25000.00

Solución:

a) $g(I) = 8000 + 0.05I + 5000 + 0.25I$

$$g(I) = 0.3I + 13000$$

b) Ganancia = Ingresos – gastos

$$G(I) = I - (0.3I + 13000)$$

$$G(I) = I - 0.3I - 13000$$

$$G(I) = 0.7I - 13000$$

c) Igualamos la función de $G(I)$ para que esta tenga un valor igual a 25000

$$25000 = 0.7I - 13000$$

$$I = (25000 + 13000)/0.7 = Q54285.71$$

Respuesta:

Ra/ $g(I) = 0.3I + 13000$; Rb/ $G(I) = 0.7I - 13000$; Rc/ Q54,285.71

.....

4. Un fabricante de chocolate artesanal produjo 14000 libras en los primeros 5 meses del año y considera que puede producir a ese ritmo durante los meses restantes.

- a) Expresar la cantidad de libras de chocolate como una función lineal del número de meses del año.
- b) Estimar el numero de libras de chocolate que se habrán producido a los 11 meses de producción.

Solución:

- a) El modelo lineal que se busca debe expresar la producción P en función del número de meses t .

$$P(t) = at + b$$

En el enunciado se indica que $P = 14000$ para $t = 5$, para calcular a se considera la razón de cambio promedio por mes, es decir:

$$a = \frac{14000}{5} = 2800$$

Con este valor la función lineal seria:

$$P(t) = 2800t$$

Ya que para $t = 0$, $P = 0$, es decir $b = 0$.

b) Para $t = 11$, se calcula P como:

$$P(11) = 2800 * 11 = 30800$$

Respuesta:

$$R_a / P(t) = 2800t; R_b / 30800 \text{ lb}$$

.....

5. El taxista A cobra Q30.00 por un viaje de hasta 20km y Q4.00 por cada kilómetro adicional. El taxista B cobra una tarifa fija de Q50.00 por una distancia máxima de 30km.

- Expresar una función lineal para el costo de un viaje con cada taxista.
- Determinar la mejor opción de pago para un viaje de 20 km y para uno de 30km.
- Determinar la distancia en que el costo de un viaje es el mismo.

Solución:

a) El taxista A define el costo de un viaje de dos formas

$$f(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 30 + 4(x - 20) & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

En forma más simple

$$f(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 4x - 50 & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

El taxista B tiene una tarifa fija, es decir:

$$g(x) = 50 \text{ si } 0 \leq x \leq 30$$

b) Analizamos ambas tarifas para $x = 20$ km

- Taxista A: Q30.00; $f(20) = 30$
- Taxista B: Q50.00; $g(20) = 50$

La opción del taxista A es mejor para un viaje de 20 km.

Ahora para la opción de $x = 30$.

- Taxista A: $f(30) = 4x - 50 = 4 * 30 - 50 = 70$
- Taxista B: $g(30) = 50$

En este caso la mejor opción la ofrece el taxista B.

c) Para determinar la distancia en la que las tarifas son iguales, procedemos de la siguiente forma:

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 50 = 50$$

$$4x = 100$$

$$x = \frac{100}{4} = 25$$

Para un recorrido de 25km, las tarifas son iguales.

Respuesta:

Ra/ Taxista A; Rb/ Taxista B; Rc/ El costo es el mismo para un recorrido de 25 km.

.....

4.2.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. En el año 2000 se inició una plantación de pinabetes con 60 árboles y se incrementó a una razón de cambio promedio de 80 por año.
 - a) Formular una función lineal para el número de arboles de la plantación a través del tiempo.
 - b) Considerando el año 2000 como $t = 0$, determinar el número de arboles que se espera para el año 2020.

Ra/ $f(t) = 80t + 60$; Rb/1660

2. Una niña al nacer pesó 7 libras y al cumplir 3 años su peso fue de 22 libras.
 - a) Suponiendo que el peso es función lineal de la edad, formular un modelo para descubrir la situación planteada.
 - b) Determinar en cuánto tiempo el peso de la niña es de 15 libras.

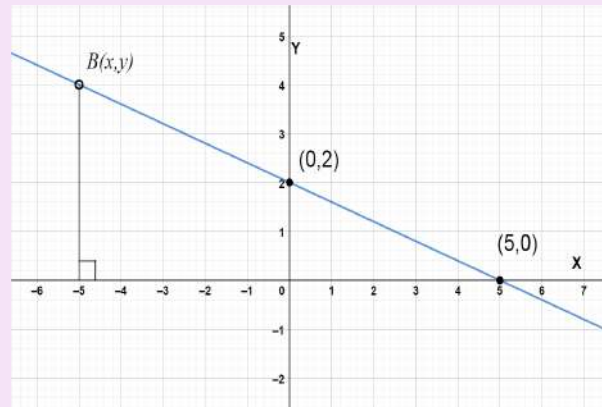
Ra/ $f(t) = 5t + 7$; Rb/1.6 años

3. Un automovilista viaja en una carretera recta a una rapidez constante, recorriendo 60km en 45 minutos.
 - a) Determinar una función lineal **d** que modele la distancia (en km) que ha recorrido después de t minutos.
 - b) ¿En cuánto tiempo recorre 85Km?

Ra/ $d = \frac{4}{3}t$; Rb/64 minutos

4. En la figura se muestra el punto B(x,y) sobre la recta que pasa por los puntos (0,2) y (5,0)

Expresar y como una función lineal de x



$$\mathbf{R/} \quad y = -\frac{2}{5}x + 2$$

5. Una fábrica de zapatos vende en Q200.00 el par, si el pedido es de 25 pares o menos. Para pedidos mayores a 25 pares hasta 50, ofrecen una rebaja de Q3.00 por cada par adicional.
- Determinar una función que modele el precio de los zapatos de acuerdo con el número de pares que se compren.
 - Graficar de la función

Ra/

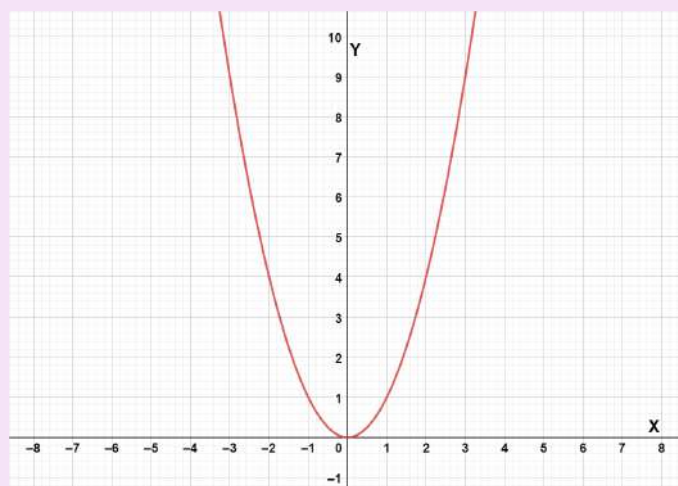
$$f(x) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 < x \leq 25 \\ -3x + 275 & \text{si } 25 < x \leq 50 \end{cases}$$

5. Funciones y modelos cuadráticos

5.1 Funciones cuadráticas

La función cuadrática está representada por un polinomio de grado dos, de forma similar a lo estudiado para la función lineal que está representada por un polinomio de grado 1.

Su forma está dada por $f(x)^2 = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R$ y $a \neq 0$. El dominio natural es R y su rango es un subconjunto de R . Su grafica corresponde a una parábola vertical cuyo caso más sencillo se presentó con anterioridad siendo este $f(x) = x^2$.



Al igual que con otras funciones, una forma de graficar la función cuadrática es elaborar una tabla con una cantidad suficiente de valores. Otra técnica consiste en escribir de otra forma la función, identificar las coordenadas del vértice y el comportamiento cuando x es 0 para determinar si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo.

La forma estándar de una función cuadrática es:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

De la cual se deducen las coordenadas del vértice en $V(h, k)$. Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba, mientras si $a < 0$ entonces abre hacia abajo.

La diversidad de aplicaciones de la función cuadrática se basa en el hecho que el vértice se ubica como el valor mínimo o el valor máximo de la función, de tal manera que ese valor se asume en $x = h$ y corresponde a $y = k$.

Una forma alternativa para identificar el valor máximo o mínimo de una función, desde la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, es ubicar:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$ entonces en $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, se ubica el valor mínimo de y .

Si $a < 0$ entonces $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, corresponde al valor máximo de y .

.....

5.1.1 Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$:

- Escribirla en forma estándar y determinar las coordenadas del vértice.
- Representar gráficamente e identificar el dominio y el rango de la función.

Solución:

- Para obtener la forma estándar de la función, empezamos por factorizar el valor de a en los términos que contienen x . Si a es 1 entonces omitimos este paso.

En $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ factorizamos 2 y da como resultado $f(x) = 2(x^2 + 2x) - 1$

Completamos un trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis y a la vez sumamos o restamos la misma cantidad para conservar la expresión original.

En este caso sumamos 1 dentro del paréntesis, pero al restar se multiplica por el dos afuera del paréntesis.

$$f(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 1 - 2$$

Al factorizar el trinomio y simplificarlo obtenemos la función en la forma estándar:

$$f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$$

Para identificar la coordenadas del vértice $V(h, k)$, se compara la expresión general con la obtenida

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

$$f(x) = 2(x+1)^2 - 3$$

Así, $h = -1$ y $k = -1$, por lo que $V(-1, -3)$ y como $a > 0$ la parábola abre hacia arriba, por lo que el vértice se asocia con el valor mínimo de la función.

b) Para trazar la gráfica es importante obtener los puntos en los que $x = 0$ y $f(x) = 0$. Podemos evaluar la forma general o la forma estándar

- 1) Si $x = 0$ de manera inmediata en la forma general $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ obtenemos $f(0) = -1$. Es decir, el punto $(0, -1)$ pertenece a la gráfica.
- 2) Si $f(x) = 0$ podemos aplicar lo aprendido sobre resolución de ecuaciones cuadráticas, tendríamos entonces $2x^2 + 4x - 1 = 0$ o bien $2(x+1)^2 - 3 = 0$.

Si optamos por resolver $2x^2 + 4x - 1 = 0$, tenemos: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$;

$$x \cong 0.22 \text{ y } x \cong -2.22$$

Si resolvemos a partir de la forma estándar, tenemos que:

$$2(x+1)^2 - 3 = 0$$

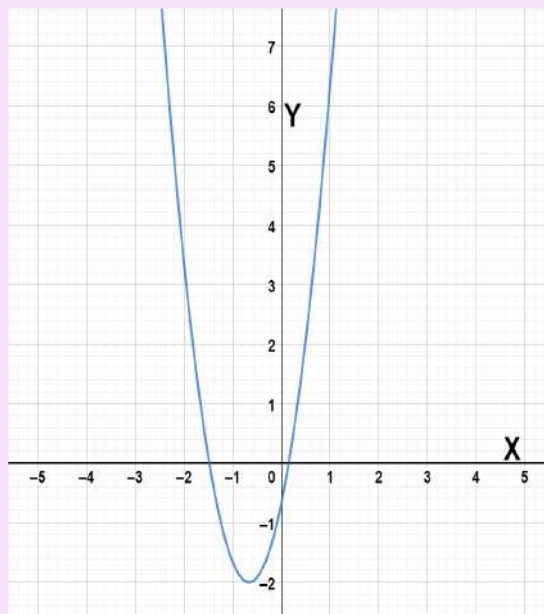
$$(x+1)^2 = \frac{3}{2}$$

$$(x+1) = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x = 0.22 \text{ y } x = -2.22$$

Los resultados coinciden y la elección del método es libre. La gráfica de la función es:



El dominio de la función es $\mathbb{R}$. El rango es el intervalo $[-3, \infty)$

Respuesta:

El dominio $\mathbb{R} > [-3, \infty)$

.....

2. Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 3x + \frac{15}{8}$

- Escribir en forma estándar y determinar las coordenadas del vértice.
- Construir la gráfica y determinar el rango.

Solución:

- Previo a factorizar $a = -2$, observamos que 3 no lo tiene como factor común, entonces podemos pensar una representación como la siguiente:

$$3x = \frac{2}{2}(3x)$$

Lo cual permite factorizar el 2 que se requiere y no afecta la expresión dado a que $2/2 = 1$, que estudiamos como el elemento neutro de la multiplicación. Ahora factorizamos **a** y completamos un trinomio cuadrado perfecto

$$f(x) = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) + \frac{15}{8} + \frac{18}{16}$$

Podemos verificar que: $2\left(\frac{3}{4}x\right) = \left(\frac{3}{2}x\right)$ corresponde al segundo término:

$$f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3$$

Las coordenadas del vértice son $V(3/4, 3)$

Como $a < 0$, la parábola tiene un máximo en $x = \frac{3}{4}$ y el valor máximo de la función es $y = 3$.

- Para construir la gráfica determinamos que:

$$f(0) = -2(0)^2 + 3(0) + \frac{15}{8} = \frac{15}{8}$$

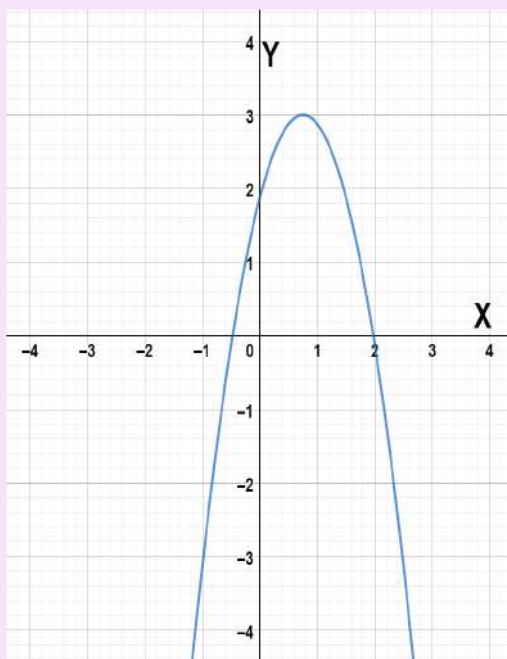
$f(0)$ cuando $-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3 = 0$, entonces:

$$3 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$$

$$\frac{3}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$$

$$x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Lo que da como resultado $x = 1.97$ y $x = 0.47$



Con la grafica se observa que el rango es de $(-\infty, 3]$

Respuesta:

El rango de la función es $(-\infty, 3]$.

.....

3. Determinar una función cuadrática que satisfaga las condiciones: $f(2) = 3$, $f(-1) = 9$ y $f(0) = 1$.

Solución:

Dado que la función debe tener la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debemos determinar los valores de a , b y c . Con la información dada determinamos que la gráfica pasa por los puntos $(2,3)$, $(-1,9)$ y $(0,1)$. Las coordenadas deben satisfacer la expresión cuadrática, por lo que evaluamos para cada uno de ellos.

- Para $(2,3)$: $3 = 4a + 2b + c$. **Ecuación 1**
- Para $(-1,9)$: $9 = a - b + c$. **Ecuación 2**
- Para $(0,1)$: $1 = c$. **Valor de c.**

Podemos sustituir el valor de c en las ecuaciones 1 y 2 y obtenemos un sistema donde las incógnitas son a y b :

- $3 = 4a + 2b + 1$ entonces $2 = 4a + 2b$
- $9 = a - b + 1$ entonces $8 = a - b$

Simplificamos la primera al dividir por 2 y resolvemos el sistema

- $1 = 2a + b$
- $8 = a - b$
- Resultado: $9 = 3a$, entonces $a = 3$.

Sustituyendo $a = 3$ en la segunda ecuación se puede determinar el valor de b : $8 = 3 - b$, entonces $b = -5$.

Así, la función cuadrática que se busca es $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Respuesta:

La función buscada es $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

.....

4. El equipo de ingenieros que labora en el área comercial de una empresa determina que la ganancia diaria en quetzales está dada por $G(x) = -2x^2 + 120x - 800$, donde x es el número de artículos que se producen por día. Se busca determinar el número de artículos que deben producir para obtener la ganancia máxima y cuál es el monto de la ganancia.

Solución:

En la función dada notamos que $a = -2$ es menor a 0, por lo en el vértice se ubica el valor máximo de la función.

Sabemos que el valor máximo ocurre en $x = -\frac{b}{2a}$, en este caso $a = -2$ y $b = 120$, así:

$$x = \frac{-120}{(2)(-2)} = 30$$

Por lo que la producción que genera la ganancia máxima es de 30 artículos diarios.

Para determinar la ganancia máxima evaluamos la función en $x = 30$:

$$G(30) = -2(30)^2 + 120(30) - 800 = -1800 + 3600 - 800$$

$$G(30) = 1000$$

Respuesta:

La ganancia máxima es de Q1000.00

.....

5. En un laboratorio clínico se considera que el número N de cierto tipo de bacteria depende de la temperatura del aire, en grados Celsius, de acuerdo con la función $N(C) = C^2 + 125C + 1000$ para $20 \leq C \leq 32$. A la vez la temperatura depende del tiempo, en horas, después de que empieza el cultivo, la relación es: $C(t) = 4t + 10$ para $0 \leq t \leq 8$

- Expresar el número de bacterias conforme del tiempo t .
- ¿Cuántas bacterias están presentes después de 4 horas?
- Determinar en cuántas horas, aproximadamente, hay 8000 bacterias.

Solución:

- a) En esta situación nos indican que el numero de bacterias es una función cuadrática de la temperatura, a la vez, la temperatura depende linealmente del tiempo.

Para expresar N en función de t aplicamos el proceso de sustitución cuyo dominio es muy importante:

$$\begin{aligned} N &= C^2 + 125C + 1000 = (4t + 10)^2 + 125(4t + 10) + 1000 \\ &= 16t^2 + 80t + 100 + 500t + 1250 + 1000 \\ N &= 16t^2 + 580t + 2350 \end{aligned}$$

- b) Si $t = 4$ entonces $N(4)$ es:

$$\begin{aligned} N(4) &= 16(4)^2 + 580(4) + 2350 \\ &= 49260 \end{aligned}$$

- c) Si $N = 8000$ debemos determinar t :

$$\begin{aligned} 8000 &= 16t^2 + 580t + 2350 \\ 0 &= 16t^2 + 580t - 5650 \\ t &= \frac{-580 \pm \sqrt{580^2 - (4)(16)(-5650)}}{32} \\ t &= \frac{-580 \pm \sqrt{698000}}{32} = \frac{-580 \pm 835.5}{32} \end{aligned}$$

El valor con esa ecuación da como resultado $t = 7.98$ dado a que el otro valor es negativo.

Respuestas:

- a. $N(t) = 16t^2 + 580t + 2350$
 b. $N = 4926$ bacterias.
 c. $t = 7.98$ horas.

.....

5.1.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x - 5$
 - a) Escribir en forma estándar e identificar las coordenadas del vértice
 $\mathbf{R/} f(x) = -(x-2)^2 - 1, V(2, -1)$
 - b) Graficar y determinar su rango
 $\mathbf{R/Rango} (-\infty, -1]$

2. Dada la función $f(x) = 3x^2 + 4x - \frac{2}{3}$ determinar:
- Forma estándar y coordenada del vértice
R/ $f(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 2, V(-2/3, -2)$
 - Gráfica y rango
R/Rango $[-2, \infty)$ **Intersecciones:** Eje Y en $y = -\frac{2}{3}$, eje X en $x = -1.48$ y $x = 0.15$
3. Determinar una función cuadrática cuya grafica pase por los puntos (2,10) , (-3,5) y (0,-4)
R/ $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
4. Un fabricante determina que el ingreso por la venta de n artículos esta dado por la función $I(n) = 1.6n - 0.0002n^2$.
- Determinar el ingreso por la venta de 7000 artículos.
R/I(7000) = 1400
 - Determinar el ingreso máximo que puede obtener y cuántos artículos debe vender para obtenerlo
R/ $x_{max} = 4000, I_{max} = 3200$
 - Graficar la función
5. El área de un rectángulo cuyo largo mide 20 metros más que su altura h , está dada por la función $A(h) = h(h + 20) = h^2 + 20h$ con $h > 0$.
- Determinar el área si $h = 25$ metros
R/1125 metros cuadrados
 - Determinar las dimensiones del rectángulo si su área tiene un valor de 1560 metros cuadrados.
R/h = 30.74 metros.
-

5.2 Modelos cuadráticos

Los modelos cuadráticos se refieren a la aplicación de funciones cuadráticas para la descripción y estudio de situaciones reales o similares a las reales. Usualmente, el dominio natural de las funciones cuadráticas, consistente en el conjunto de los números reales, se restringe de acuerdo al problema en estudio. Por ejemplo, si un modelo cuadrático describe la variación del área de un rectángulo en función de su ancho x , los valores posibles se restringen a números mayores que cero.

Las situaciones que se pueden analizar por medio de modelos cuadráticos son variadas, en particular son de interés las que requieren identificar valores máximos o mínimos de la variable en estudio, lo cual se puede realizar estableciendo las coordenadas del vértice de la parábola que representa a la función, y considerando que si la gráfica abre hacia arriba, entonces en el vértice ocurre el valor mínimo, mientras que si abre hacia abajo corresponde al valor máximo de la función.

En general, cuando se busca un modelo matemático para estudiar una situación dada, es importante identificar las variables involucradas, establecer las relaciones entre ellas y proponer una función que describirá el comportamiento, en este caso, buscaremos una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ siendo } a, b \text{ y } c \text{ números reales y } a \neq 0$$

5.2.1 Ejercicios Resueltos

1. La suma de dos números es 12. Determinar ambos números cuando el producto es máximo.

Solución:

Denotamos los números por x y y . La suma de ambos es: $12 = x + y$. Esta es la ecuación 1.

El producto de los números se expresa como $P = xy$. Puesto que hay dos variables debemos expresar una en términos de la otra. Al despejar y en la ecuación 1 se obtiene que $y = 12 - x$. Y al sustituir en P se obtiene lo siguiente:

$$P = x(12 - x) = -x^2 + 12x$$

La función obtenida para P es cuadrática con $a = -1$, $b = 12$ y $c = 0$.

Usamos la ecuación de valor máximo para x

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = 6$$

Ya con el valor de x sustituimos en la ecuación 1 para obtener y

$$y = 12 - 6 = 6$$

Respuesta

Los valores de los números son $x = 6$ y $y = 6$.

2. Un museo de arte, cerrado a visitas presenciales, ofrece recorridos virtuales y puede atender a 1500 personas a la semana. Con un precio de Q15.00 por persona han atendido a 950 visitantes por semana. Estimaron que al disminuir el precio podrían captar más interesados, por ejemplo, por un quetzal de rebaja aumentan 100 visitantes virtuales x .

- Determinar una función que modele los ingresos del museo por medio de recorridos virtuales, en términos de precio por boleto.
- Determinar el precio que genere el ingreso máximo y el monto de dicho ingreso.

Solución:

- Denotamos por x el precio del boleto y por $I(x)$ los ingresos en función del precio. Los ingresos que obtiene el museo están dados por:

- Ingreso = (Precio) (Número de boletos Vendidos)
- $I(x) = x(\text{número de boletos vendidos})$

Debemos expresar el número de boletos vendidos en función del precio x . Con la situación original tenemos que:

- Precio inicial = 15
- Precio rebajado = x
- Descuento = $15 - x$

En cuanto a los boletos vendidos se sabe que son 950 y que incrementan 100 por cada Q1.00 de descuento.

- Aumento de venta = $100(\text{Descuento}) = 100(15 - x) = 1500 - 100x$
- Venta total = Venta inicial + aumento = $950 + 1500 - 100x = 2450 - 100x$

Procedemos a sustituir en $I(x)$ el numero de boletos y se obtiene lo siguiente:

$$I(x) = x(2450 - 100x) = -100x^2 + 2450x$$

b) $a = -100, b = 2450$

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-2450}{-200} = 12.25$$

El ingreso máximo es $I(12.25)$

$$I(12.25) = -100(12.25)^2 + 2450(12.25) = 15006.25$$

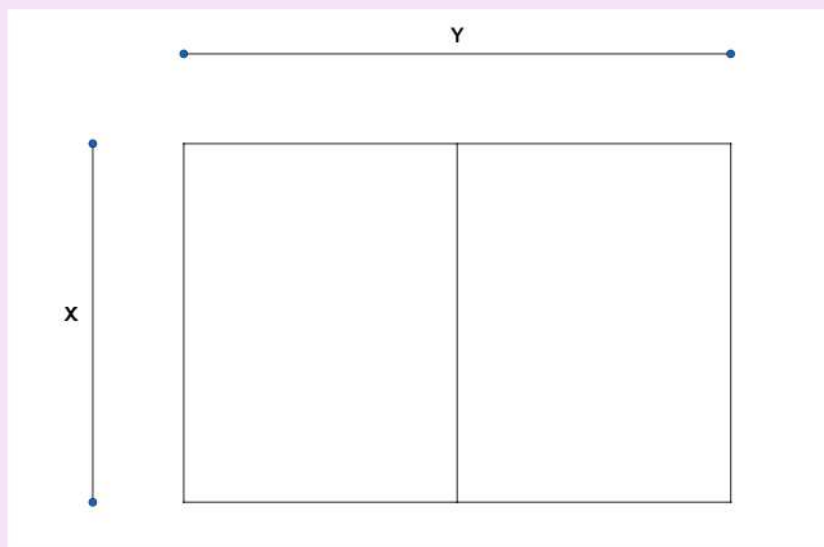
Respuestas

a) $I(x) = x(2450 - 100x) = -100x^2 + 2450x$

b) El ingreso máximo es de Q15,006.25 a un precio de Q12.25 por boleto.

3. Se disponen de 800 pies de cerca para separar dos corrales como se muestra en la figura.

- Generar una función para describir el área cercada.
- Determinar las dimensiones que generan el área máxima.



Solución:

- a) El area total del terreno es $A = xy$. Debemos expresar y en términos de x , para eso utilizamos el perímetro a cercar

$$800 = 3x + 2y$$

$$y = \frac{800 - 3x}{2} = 400 - \frac{3x}{2}$$

Ahora sustituimos ese valor en A :

$$A(x) = x \left(400 - \frac{3x}{2} \right) = 400x - \frac{3x^2}{2}$$

- b) El máximo valor ocurre en $x = \frac{-b}{2a}$

$$x = \frac{-400}{2 \left(\frac{3}{2} \right)} = \frac{400}{3}$$

Ya con ese valor se puede encontrar el valor máximo de y :

$$y = \frac{800 - 3 \left(\frac{400}{3} \right)}{2} = 200$$

Respuestas

a) $A(x) = x \left(400 - \frac{3x}{2} \right) = 400x - \frac{3x^2}{2}$

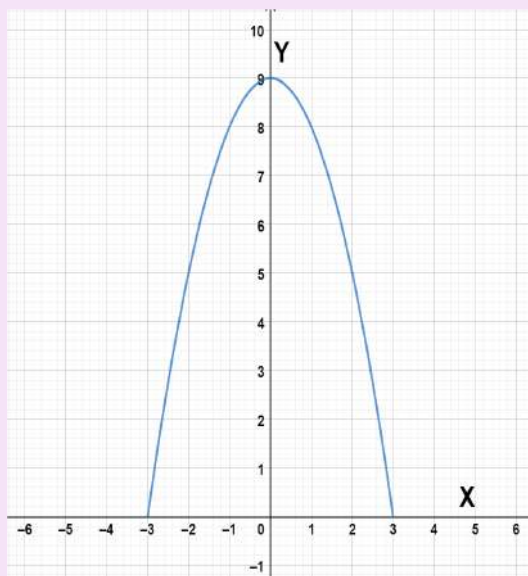
b) Los valores máximos de la cerca son: $x = \frac{400}{3}$ y $y = 200$

.....

4. Una puerta de forma parabólica mide 6 pies de ancho en la base y 9 pies de alto en el centro, si un mueble rectangular de 8 pies de alto debe entrar por la puerta, determinar el ancho que debe tener.

Solución:

Para comprender la situación plantada, realizamos un esquema, haciendo que la base de la puerta coincida con el eje X y el punto más alto en el eje Y .



El vértice tiene coordenadas (0,9) y los extremos de las bases están en (3,0) y (-3,0). Al conocer las coordenadas del vértice, podemos usar la forma estándar de la parábola:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k = a(x-0)^2 + 9$$

$$f(x) = ax^2 + 9$$

Como la parábola abre hacia abajo, $a < 0$, para determinar sus valores evaluamos en (3,0)

$$0 = a(3)^2 + 9$$

$$-9 = 9a$$

$$a = -1$$

$$f(x) = -x^2 + 9$$

Para determinar la coordenada x para $y = 8$, evaluamos la función:

$$8 = -x^2 + 9$$

$$[x = \pm 1$$

Respuesta:

El ancho de la caja sería 2 pies.

.....

5. Un fabricante de camisetas vende a Q40.00 cada una si le compran menos de 50; si compran 50 a 600 reduce el precio 0.04 por el número comprado.

- Formular una función para el precio de las camisetas x
- Formular una función para el ingreso por venta de camisetas.
- Determinar el precio que produce a la empresa el ingreso máximo.

Solución:

- a) Las condiciones dadas indican que el precio se define de dos formas distintas, en función del número de camisetas que se vendan. El descuento del precio inicial solo es aplicable si se venden 50 camisetas o más. Así que el número de camisetas sería x y el precio está dado por:

$$40 - 0.04x$$

La función para el precio es:

$$f(x) = \begin{cases} 40 & \text{si } 0 < x < 50 \\ 40 - 0.04x & \text{si } 50 \leq x \leq 600 \end{cases}$$

- b) Los ingresos I se obtienen de la siguiente forma: $I = (\text{precio})(\text{número de camisetas})$;
 $I = \text{precio}(x)$

Como hay dos funciones del precio, debe haber dos funciones de ingresos

$$I(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 < x < 50 \\ x(40 - 0.04x) & \text{si } 50 \leq x \leq 600 \end{cases}$$

- c) El ingreso máximo para x menor a 50:

$$I(x) = 40(49) = 1960$$

Dado que para 50 o más $I(x)$ es una función cuadrática, se calcula con el valor máximo:

$$x = \frac{-40}{2(-0.04)} = 500$$

$$I(500) = -0.04(500)^2 + 40(500) = -10000 + 20000 = 10000$$

Respuestas:

Inciso a)

$$f(x) = \begin{cases} 40 & \text{si } 0 < x < 50 \\ 40 - 0.04x & \text{si } 50 \leq x \leq 600 \end{cases}$$

Inciso b)

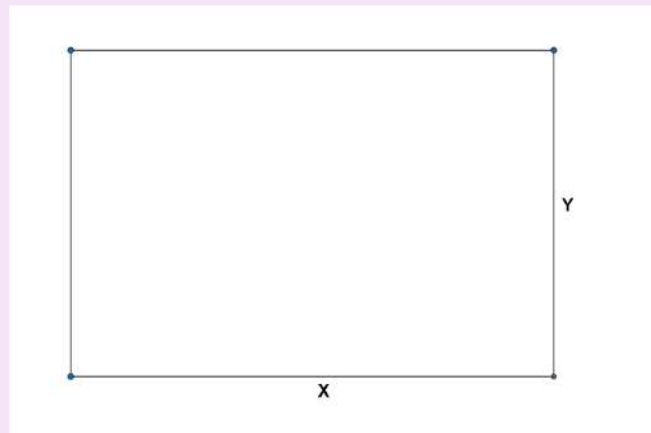
$$I(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 < x < 50 \\ x(40 - 0.04x) & \text{si } 50 \leq x \leq 600 \end{cases}$$

Inciso c)

El ingreso máximo sería: Q1960 para menos de 50 camisetas y Q5000 para un lote de 50 a 600.

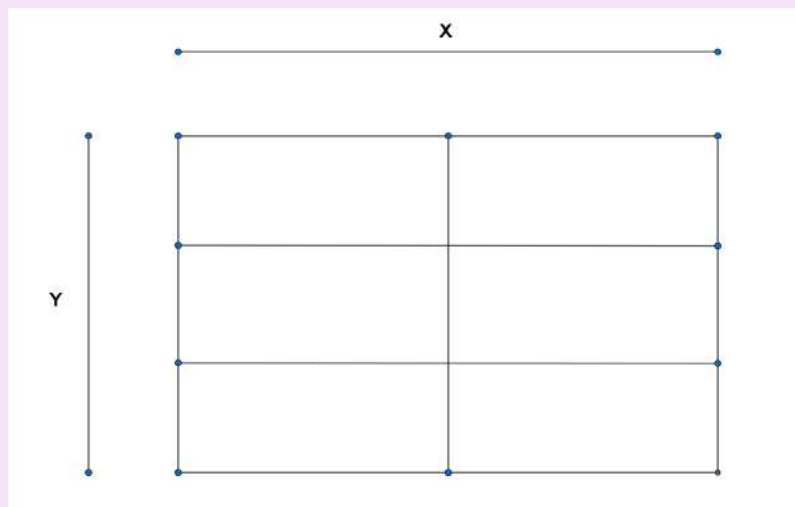
5.2.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. El propietario de una casa tiene 40 metros de alambre para cercar un jardín rectangular. Determinar las dimensiones del jardín para que el área cercada sea máxima.



R/ $x = 10\text{m}$, $y = 10\text{m}$

2. Se dispone de 1000 pies de cerca para cercar un terreno como el que se muestra en la figura. Formular una función para modelar el área del terreno y calcular las dimensiones del área máxima.



$$\mathbf{R/} \quad -\frac{4}{3}x^2 + \frac{1000}{3}x ; x_{\max} = 125 ; y_{\max} = \frac{500}{3}$$

3. Una empresa de televisión por cable tiene 800 usuarios con un costo equivalente a 50 dólares mensuales. Han detectado que por cada descuento equivalente a 1 dólar se incrementan 200 usuarios.
 - a) Determinar una función que modele los ingresos I en función del precio x .
R/ $I(x) = -200x^2 + 18000x$
 - b) Determinar el precio que maximice los ingresos
R/ 45 dólares

4. Un arco parabólico abarca 120 pies en la base y una altura máxima de 25 pies. Determinar:
- a) Una expresión para el arco parabólico.

$$\mathbf{R/} \frac{-1}{144}x^2 + 25$$

- b) La altura del arco a 40 pies del centro.

$$\mathbf{R/13.89 \text{ pies}}$$

5. La suma de dos números reales positivos es 30.

- a) Formular una función para la suma de sus cuadrados.

$$\mathbf{R/} I(x) = 2a^2 - 60a + 900$$

- b) Determinar los valores de dichos números para que la suma de sus cuadrados sea mínima.

$$\mathbf{R/a = 15, b = 15.}$$



6. Transformación de funciones

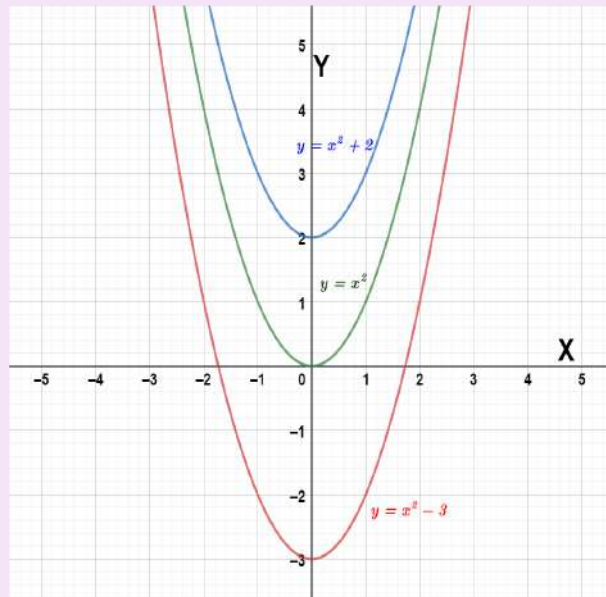
Los cambios o transformaciones en las gráficas de funciones conocidas, ocurren por la variación en los coeficientes generales de funciones como: lineales, cuadráticas, entre otras.

Las transformaciones gráficas que estudiaremos son: traslaciones o desplazamientos, alargamientos o acortamientos tanto verticales como horizontales y reflexiones con respecto al eje X y al eje Y.

Traslaciones o desplazamientos

- a) **Verticales:** Dada la gráfica de una función $f(x)$ y una constante k , se puede generar una nueva función de la forma $y = f(x) + k$, cuya gráfica es la gráfica de $f(x)$ trasladada verticalmente k unidades hacia arriba si $k > 0$, o bien k unidades hacia abajo si $k < 0$.

Por ejemplo, se muestra en la figura $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 3$

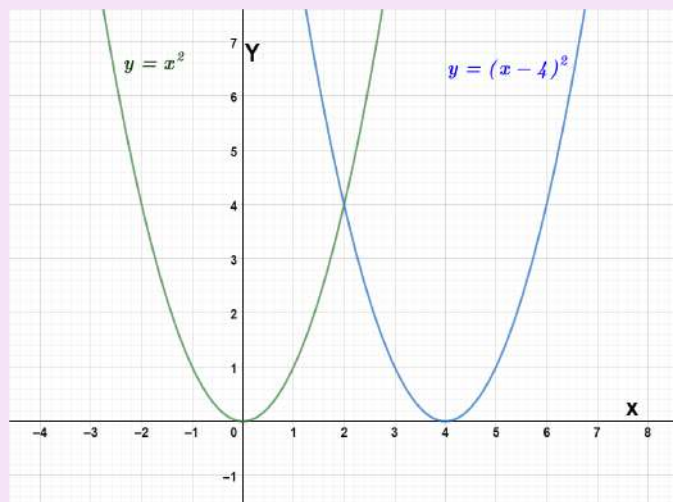


- b) **Horizontales:** Las traslaciones o desplazamientos horizontales de una gráfica se generan cuando una función $f(x)$ se transforma en $f(x - h)$, con h un número real.

Una forma sencilla de identificar si el desplazamiento es a la derecha o a la izquierda consiste en identificar el valor para el cual $x - h = 0$. Por ejemplo:

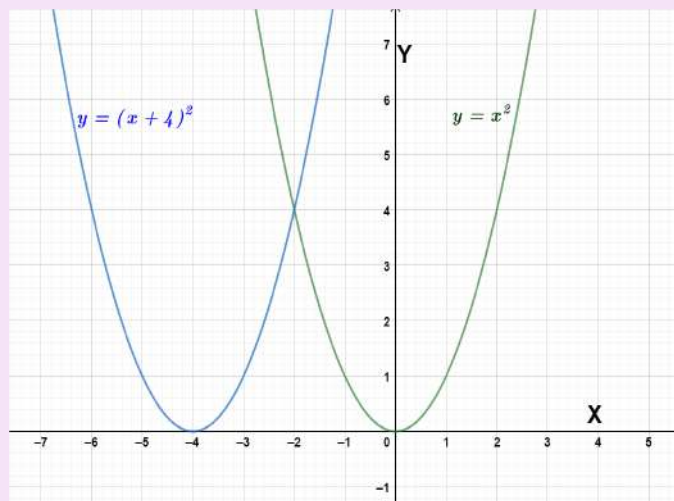
- $f(x) = (x - 4)^2$

En este caso $x - 4 = 0$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha.

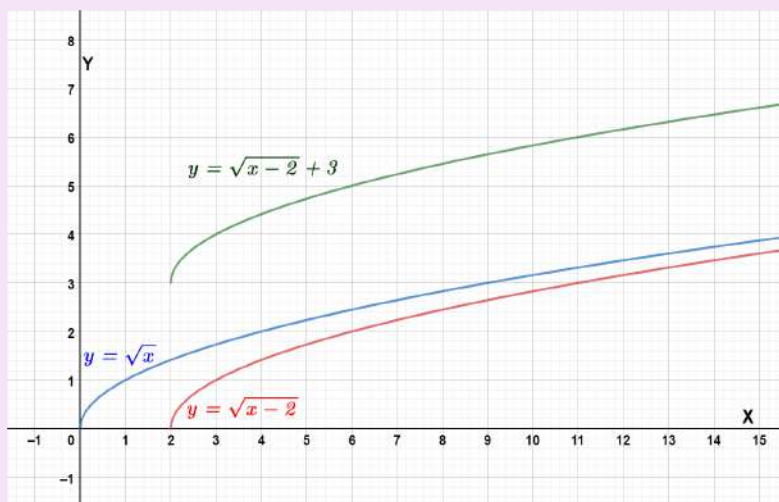


- $f(x) = (x + 4)^2$

En este caso $x + 4 = 0$. La gráfica de $f(x)$ se desplaza 4 unidades hacia la izquierda.



En algunas ocasiones, se combinan ambos tipos de desplazamientos, por ejemplo: a partir de $f(x) = \sqrt{x}$ generamos $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$, cuya gráfica se traslada 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

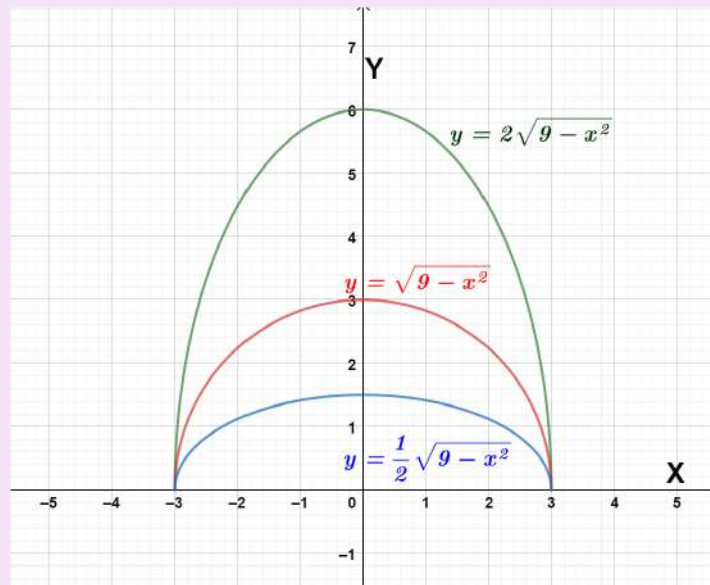


Alargamientos y acortamientos

La gráfica de una función f se estira verticalmente si se multiplica por una constante k , si $k > 0$ la gráfica se estira, mientras que si $0 < k < 1$ entonces la gráfica se comprime.

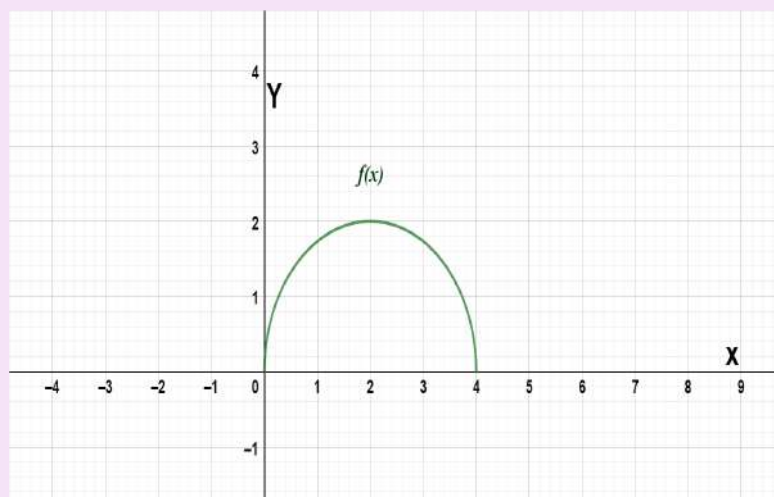
Como ejemplo se presenta la gráfica de $y = \sqrt{9 - x^2}$ correspondiente a media circunferencia, que se transforma en $y = 2\sqrt{9 - x^2}$ y se estira al doble en el eje Y , mientras que $y = \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}$ se comprime

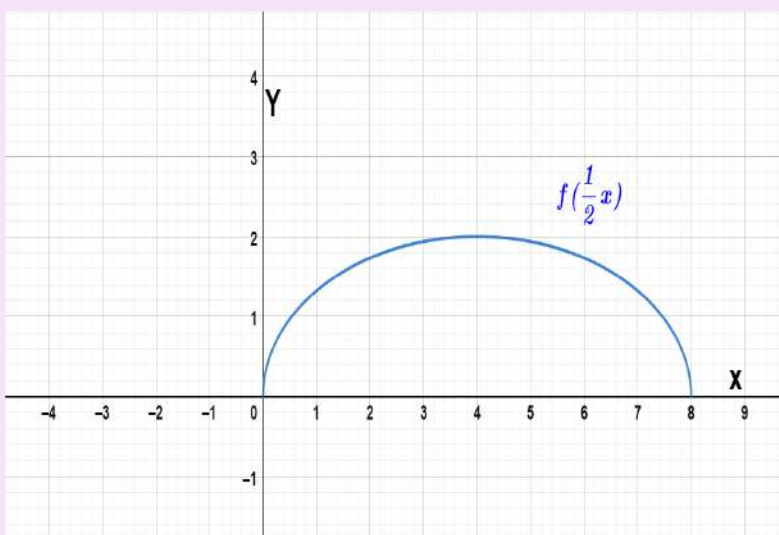
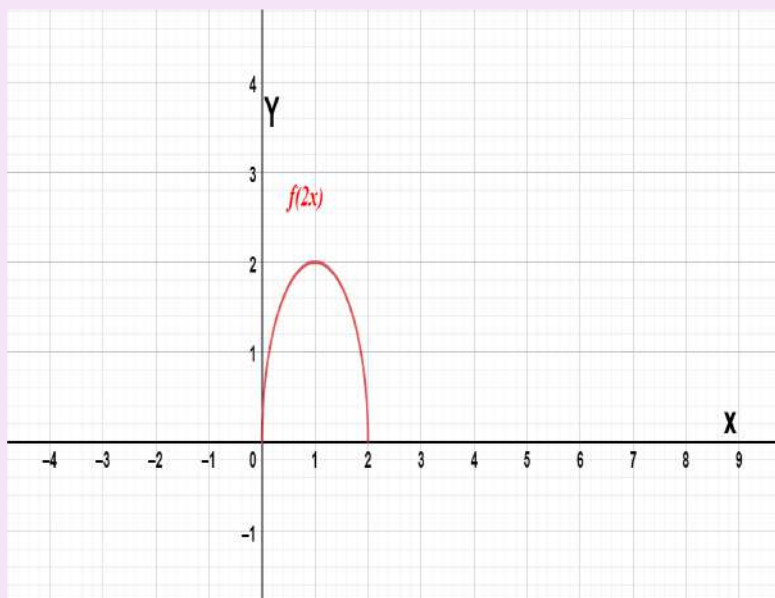
a $\frac{1}{2}$.



Un alargamiento o acortamiento horizontal ocurre cuando el argumento de una función se multiplica por un número k , es decir, la función $f(x)$ se transforma en $f(ax)$. Si $a > 1$ la gráfica de $f(x)$ se acorta en un factor de $\frac{1}{a}$ y si $0 < a < 1$, entonces la gráfica de $f(x)$ se alarga en un factor $\frac{1}{a}$.

Se muestra la gráfica de una función f , la de $f(2x)$ y $f(\frac{1}{2}x)$. Para $a = 2$ la gráfica se acorta en $\frac{1}{2}$, mientras que para $a = \frac{1}{2}$ la gráfica se alarga en un factor de $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.





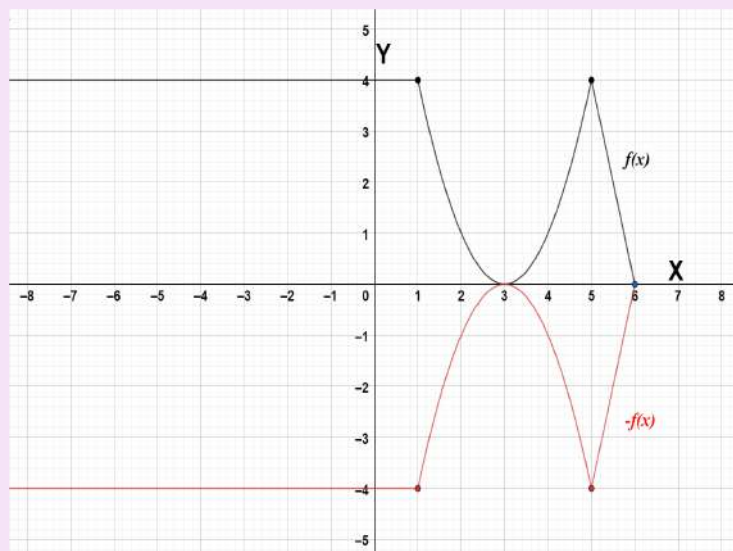
Reflexiones con respecto a los ejes coordenados

La reflexión de una gráfica se asocia con un cambio de signo de $f(x)$ para el caso del eje X , mientras que para el eje Y se asocia con un cambio de signo en x .

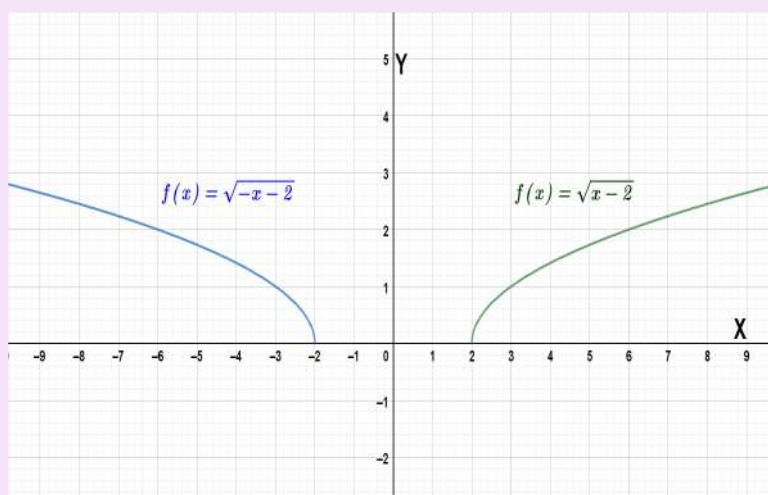
1. Reflexión en el eje X : $f(x)$ cambia a $-f(x)$
2. Reflexión en el eje Y : $f(x)$ cambia a $f(-x)$

Dada la siguiente gráfica de $-f(x)$. Para los $x \leq 2$, $f(x) = 2$, en ese intervalo, $-f(x) = -2$. En el intervalo entre 2 y 4, la gráfica es una parábola que abre hacia arriba, $-f(x)$ es una parábola que abre hacia abajo.

En el intervalo de 4 a 6 la función inicia en $y = 2$ y termina en $y = 0$, $-f(x)$ inicia en $y = 2$ y termina en $y = 0$.



Las reflexiones gráficas respecto a x , se relacionan con $f(-x)$, por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x-2}$ y su reflexión horizontal es $f(-x) = \sqrt{-x-2}$



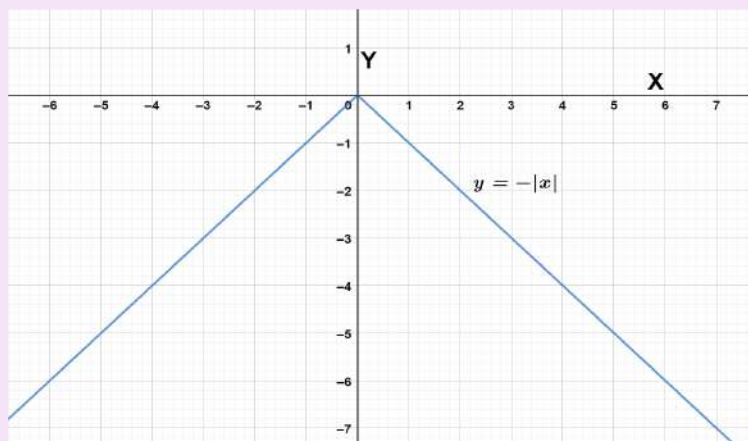
6.1 Ejercicios resueltos

1. A partir de la gráfica de $f(x) = |x|$, graficar las siguientes transformaciones:

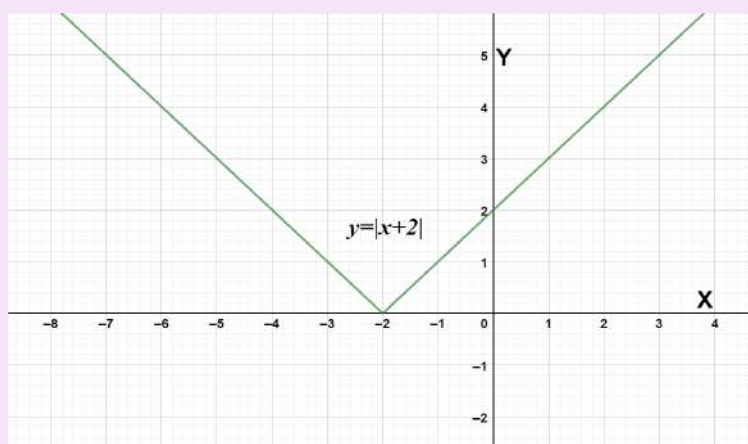
- a) $y = -f(x)$
- b) $y = f(x+2) + 3$

Solución:

- a) $y = -f(x)$ significa que todos los valores de y cambian de signo, dado que todos son positivos por el valor absoluto, estos se transforman en negativos



- b) $y = f(x+2) + 3$ es la forma $y = f(x+h) - k$, la cual se asocia con una traslación horizontal hasta $x = -2$ y una traslación vertical 3 unidades hacia abajo.



.....

2. Determinar la función que resulta de la transformación indicada para $y = \sqrt{x}$

- La gráfica se refleja con respecto al eje X, se traslada tres unidades hacia arriba y dos hacia la derecha. Indicar las coordenadas transformadas del punto P(9,3).
- Los valores de y se duplican y la gráfica se refleja con respecto al eje Y.

Solución:

- La gráfica de una función $f(x)$ se refleja con respecto al eje X cuando $y = -f(x)$, en este caso:

$$y = -\sqrt{x}$$

La traslación tres unidades hacia arriba se denota como $y = -f(x) + 3$

$$y = -\sqrt{x} + 3$$

La traslación horizontal dos unidades a la derecha se representa por $y = -f(x-2) + 3$ dando como resultado la función:

$$y = -\sqrt{x-2} + 3$$

Para el punto (9,3) se identifican las siguientes transformaciones:

- Reflejo en el eje X: (9,3) cambia a (9,-3)
- Traslación vertical tres unidades hacia arriba: (9,-3) cambia a (9,0)
- Traslación horizontal dos unidades hacia la derecha: (9,0) cambia a (11,0)

Ra/ La función resultante es $y = -\sqrt{x-2} + 3$ y las nuevas coordenadas del punto (9,3) son (11,0)

- b) Dado que los valores de la coordenada y se duplican, la expresión de la función se modifica de la siguiente manera:

$$y = 2\sqrt{x}$$

Si la gráfica se refleja en el eje Y significa que la función se evalúa en $-x$, entonces la expresión resultante es:

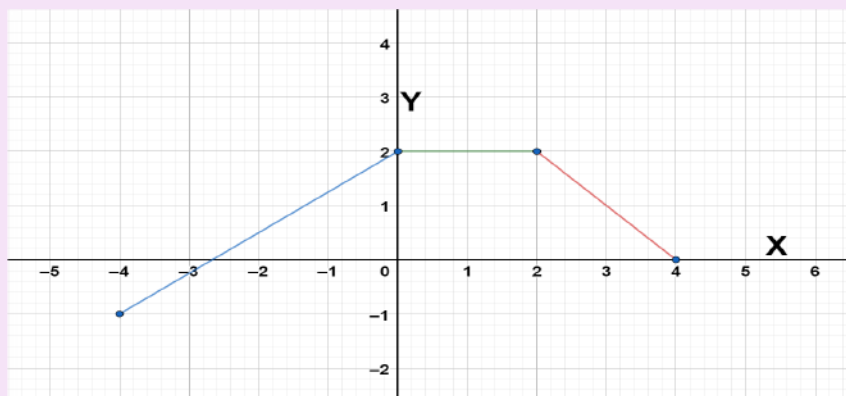
$$y = 2\sqrt{-x}$$

Rb/La función resultante es $y = 2\sqrt{-x}$

.....

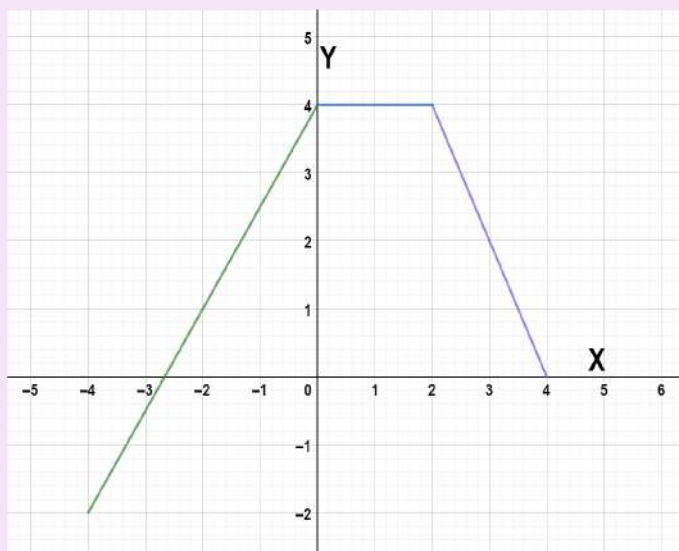
3. A partir de la gráfica dada, representar las transformaciones indicadas en cada caso:

- a) $y = 2f(x) - 1$
b) $y = f(x - 1)$

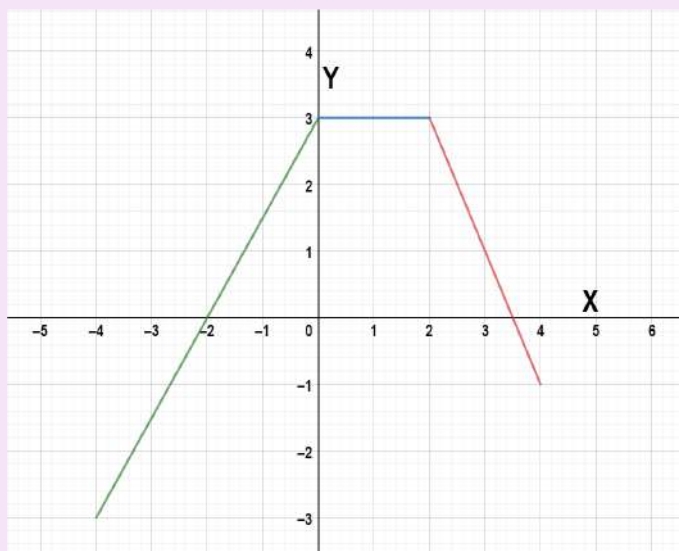


Solución:

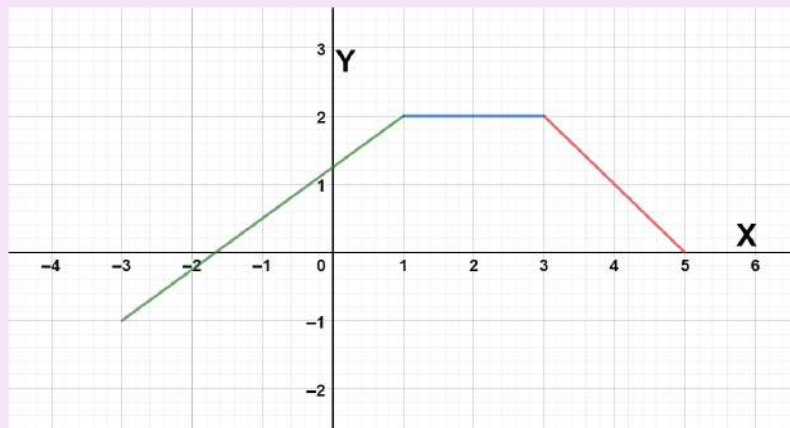
- a) Dado que $f(x)$ se duplica la gráfica sufre la siguiente transformación



La siguiente transformación ocasiona una traslación de 1 unidad hacia abajo, la gráfica resultante es la siguiente:



- b) Dado que la función es $y = f(x - 1)$ la gráfica de f sufre una traslación horizontal de 1 unidad hacia la derecha.



.....

4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } -6 \leq x \leq -3 \\ x+3 & \text{si } -3 < x \leq 0 \\ -x+3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

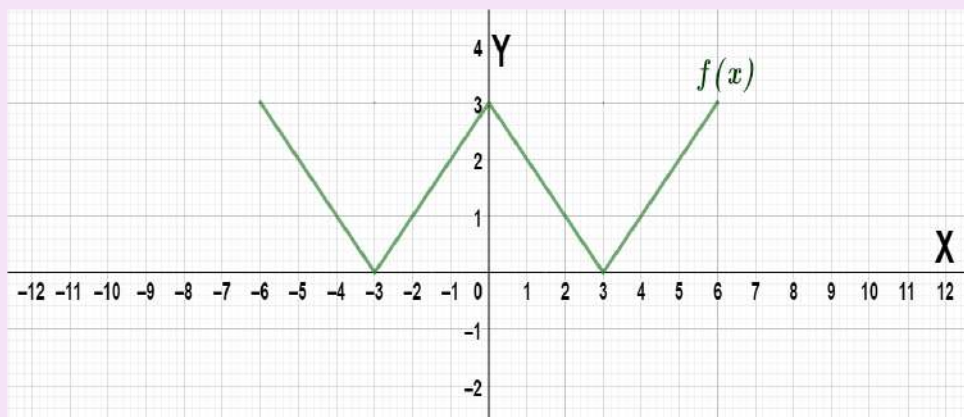
- a) Graficar $f(x)$
- b) Graficar $f(2x)$
- c) Graficar $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

Solución:

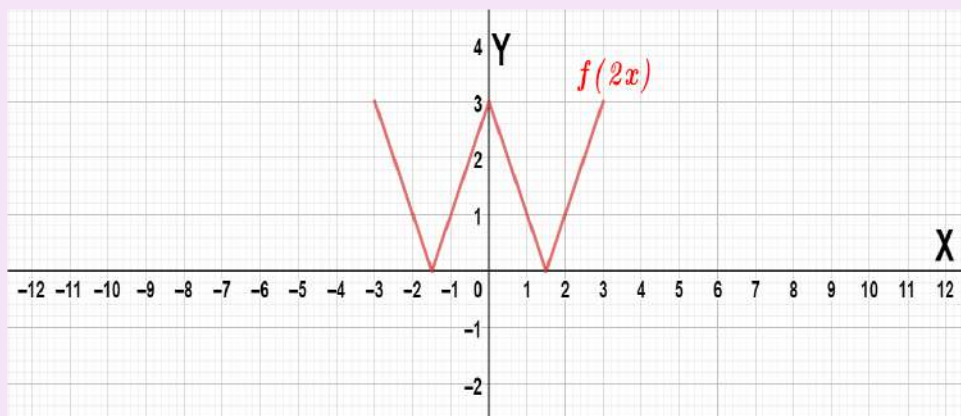
a) Para graficar f , determinamos que su dominio abarca el intervalo $[-6,6]$, hay cuatro partes definidas por funciones lineales, cuyas gráficas alternan pendientes negativas y positivas. Así:

- En $[-6,-3]$, $f(-6) = 3$ y $f(-3) = 0$
- En $(-3,0]$, $f(0) = 3$
- En $(0,3]$, $f(3) = 0$
- En $(3,6]$, $f(6) = 3$

Ubicando estos puntos en el plano, podemos trazar la gráfica para f

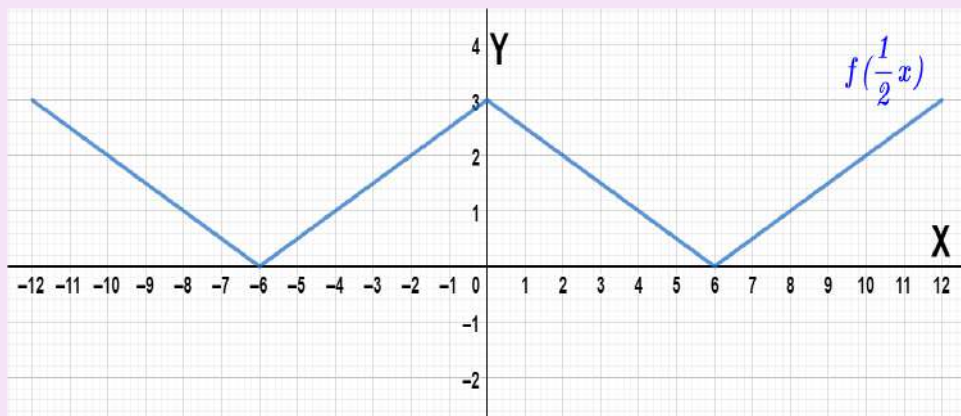


b) La gráfica de $f(2x)$ es un acortamiento en un factor de $\frac{1}{2}$ de la gráfica anterior:



La imagen de $x = -6$ corresponde ahora a $x = -3$, es decir $f(-3) = 3$. También la imagen de $x = -3$ se asigna a 1.5, $f(1.5) = 0$. Se procede de forma similar para otros puntos.

- c) La grafica de $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ corresponde a un alargamiento de la grafica $f(x)$ en un factor de 2



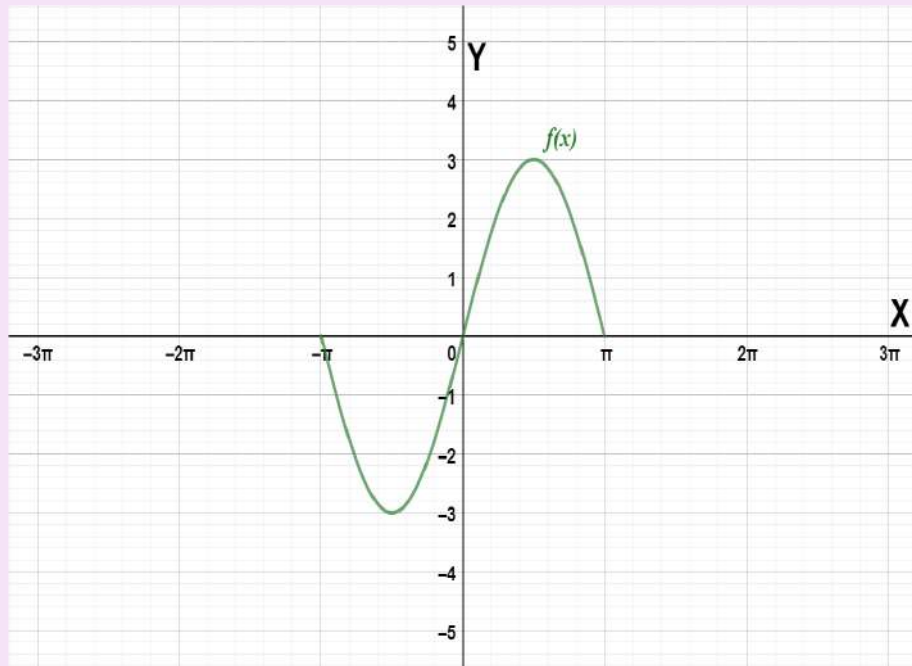
Algunos puntos que sirven de guían son: $f(-6)$ se asigna a $f(-12)$ y $f(6)$ corresponde a $f(12)$. ¿Por qué $f(0)$ no cambia?

.....

5. Dada la gráfica de $f(x)$, representar:

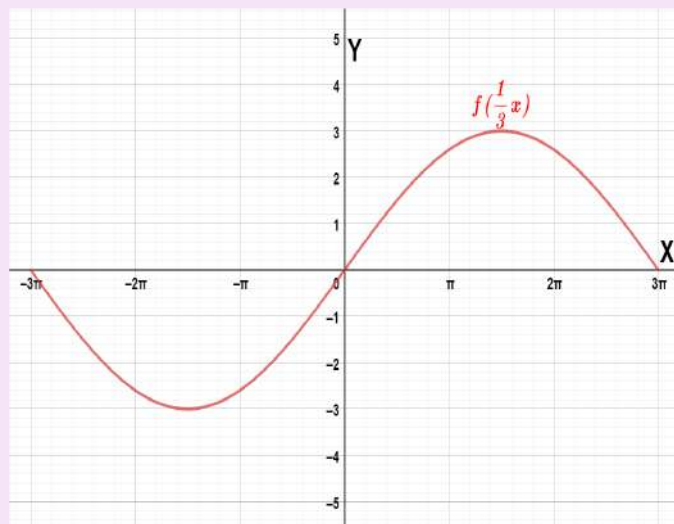
a) $f(3x)$

b) $f\left(\frac{1}{3}x\right)$

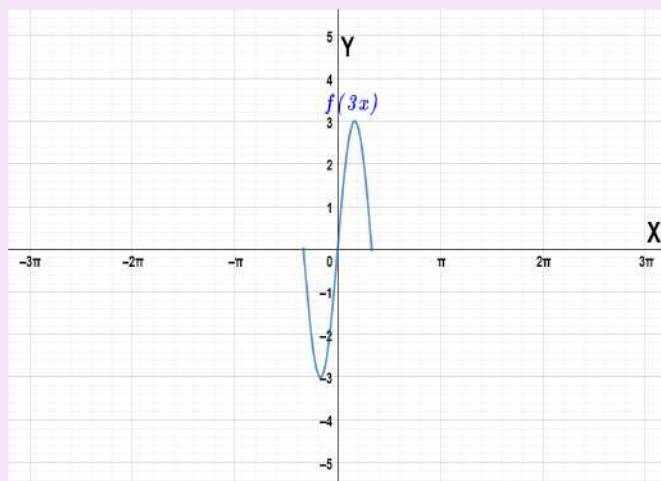


Solución:

- a) La gráfica sufre un acortamiento horizontal en el eje X en un factor de $\frac{1}{3}$



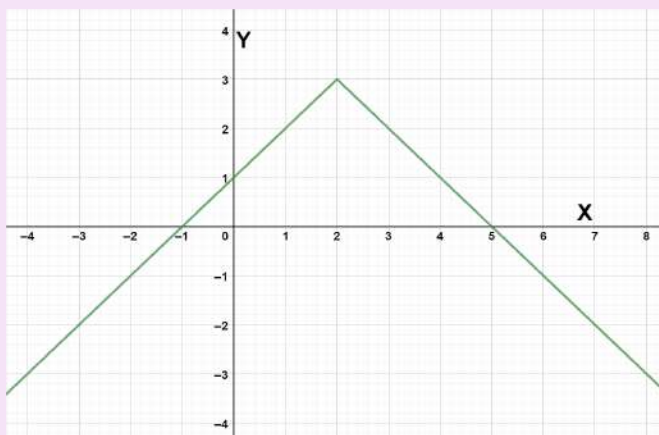
- b) La grafica se alarga en un factor de 3



.....

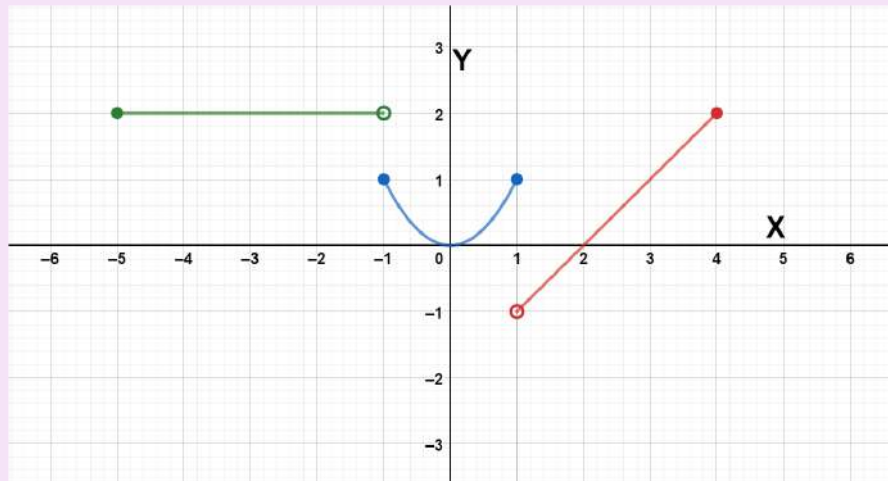
6.2 Ejercicios para la autoevaluación

- Determinar las funciones generadas por las transformaciones de $f(x) = |x|$, que se muestran en la gráfica:

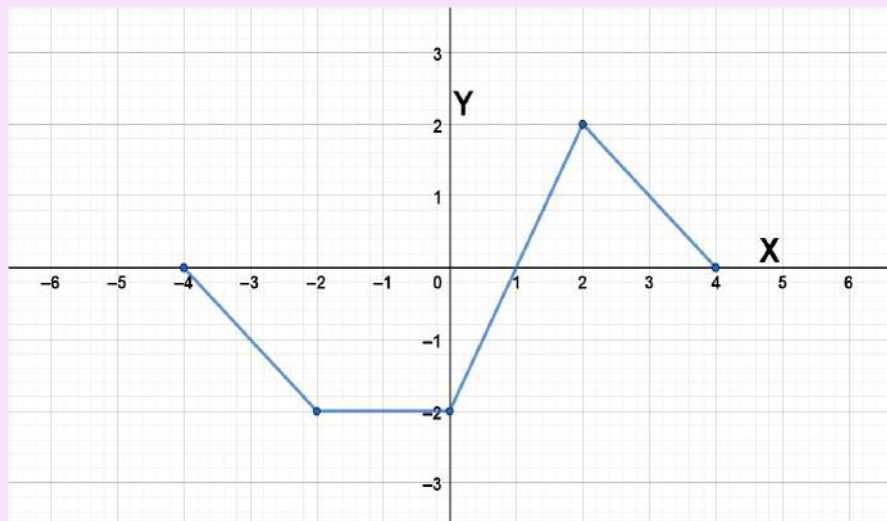


$$\mathbf{R/} f(x) = -|x+2| + 3$$

- Si $f(x) = x^2$ escribir las funciones que resultan de las transformaciones indicadas:
 - Alargamiento vertical al triple de los valores de y , desplazamiento horizontal 3 unidades a la izquierda y desplazamiento vertical 2 unidades hacia abajo.
 $\mathbf{R/} y = 3(x+3)^2 - 2$
 - Acortamiento vertical de $\frac{1}{2}$, reflejo con relación al eje X y desplazamiento vertical de 1 unidad hacia arriba.
 $\mathbf{R/} y = -\frac{1}{2}(x)^2 + 1$
- Con base en la gráfica dada para f , graficar
 - $y = -2f(x)$
 - $y = \frac{1}{2}f(x-2)$



4. Con base en la gráfica f dada, representar de forma gráfica $f(2x)$ y $f\left(\frac{1}{2}x\right)$



5. Para una función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,4)$ determinar las coordenadas del punto después de las siguientes transformaciones:

a) $f(2x)$

R/(1,4)

b) $3f(x)$

R/(2,12)

c) $-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

R/(4,-4)

d) $f(x-3)+1$ **R/(5,5)**



7. Combinación y composición de funciones

Las funciones pueden combinarse para formar nuevas funciones, por medio de operaciones con un significado conocido como la adición, la sustracción, el producto y la división, así como una operación adicional conocida como la composición.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones con dominios D_f y D_g , se definen las operaciones entre ellas de la siguiente forma:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$
4. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ siempre que $g(x) \neq 0$

El dominio para la adición, sustracción y producto de dos funciones corresponde a la intersección de sus dominios, es decir, $D(f + g)$, $D(f - g)$ y $D(fg)$ está dado por $D_f \cap D_g$.

Otra forma de obtener funciones es la operación de composición, la cual consiste en aplicar una función sobre otra función, se denota por $(f \circ g)$. La composición se define como:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. En general $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ con excepción de que f y g sean inversas.

.....

7.1 Ejercicios resueltos

1. Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 - x - 3$ y $g(x) = 3x - 2$, determinar los valores requeridos
 - a) $(g - f)(-3)$
 - b) $(f * g)(-2)$

- c) $\left(\frac{g}{f}\right)(0)$
 d) $(g \circ f)(4)$
 e) $(f \circ g)(-1)$

Solución:

Aplicamos las definiciones de las operaciones con funciones:

1. $(g - f)(3) = g(3) - f(3) = [3(3) - 2] - [2(3)^2 - 3 - 3] = 7 - (12) = -5$
2. $(f * g)(-2) = f(-2)g(-2) = [2(-2)^2 - (-2) - 3][3(-2) - 2] = 7(-8) = -56$
3. $\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{[3(0) - 2]}{[2(0)^2 - 0 - 3]} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$
4. $(g \circ f)(4) = g[f(4)] = g[2(4)^2 - 4 - 3] = g(25) = [3(25) - 2] = 73$
5. $(f \circ g)(-1) = f[g(-1)] = f[3(-1) - 2] = f(-5) = [2(-5)^2 - (-5) - 3] = 52$

Respuestas:

Las respuestas para las operaciones indicadas son: a. -5 , b. -56 , c. $\frac{2}{3}$, d. 73 , e. 52

2. Si $g(x) = \sqrt{x+2}$ y $h(x) = x+3$ determinar:

- a) $(g \circ h)(x)$
- b) $(h \circ g)(x)$
- c) $(g \circ g)(x)$
- d) $(h \circ h)(x)$

Solución:

Para este ejercicio se requiere encontrar una expresión para la función generada por medio de la composición.

- a) $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[x+3] = \sqrt{(x+3)+2} = \sqrt{x+5}$
- b) $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h[\sqrt{x+2}] = \sqrt{x+2} + 3$
- c) $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g[\sqrt{x+2}] = \sqrt{\sqrt{x+2}+2}$
- d) $(h \circ h)(x) = h[h(x)] = h[x+3] = (x+3)+3 = x+6$

Respuestas:

a. $\sqrt{x+5}$, b. $\sqrt{x+2}+3$, c. $\sqrt{\sqrt{x+2}+2}$, d. $x+6$

3. Dadas $f(x) = 2x+3$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ determinar una expresión para: $[(f \circ g) \circ h](x)$ con $x \neq 0$.

Solución:

Para realizar la composición de tres funciones podemos aplicar la definición dada para dos funciones:

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)[h(x)] \\ &= f(g[h(x)]) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \neq 0 \\ &= f\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{x}} + 3 \\ &\quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Respuesta:

El resultado de la operación es: $[(f \circ g) \circ h](x) = 2\sqrt{\frac{1}{x}} + 3$. Se recomienda realizar: $[f \circ (g \circ h)](x)$

.....

4. En la tabla se muestran algunos valores de dos funciones

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	3	4	5	6	7
$g(x)$	1	2	5	10	17	26

Determinar:

- a) $(f * g)(3)$
- b) $(f + g)(5)$
- c) $(g \circ f)(1)$
- d) $(f \circ g)(2)$

Solución:

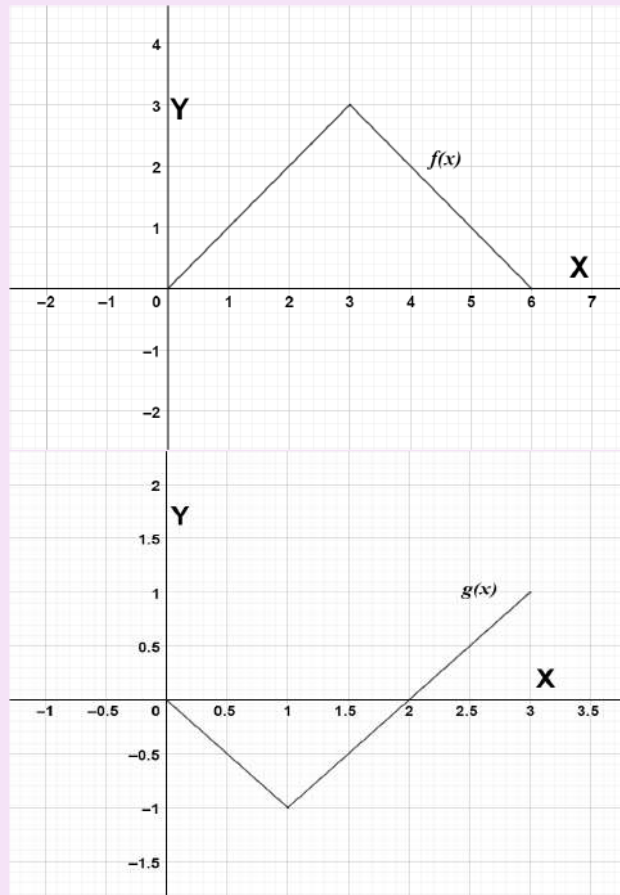
En este caso, determinamos los valores de f y g a partir de la información dada en la tabla

1. $(f * g)(3) = f(3) * g(3) = 5 * 10 = 50$
2. $(f + g)(5) = f(5) + g(5) = 7 + 26 = 33$
3. $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g[3] = 10$
4. $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f[5] = 7$

Respuestas:

Los resultados de las operaciones indicadas son: a. 50 , b. 33 , c. 10 , d. 7

5. A partir de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ mostradas determinar los valores indicados a continuación,



- a) $(f + g)(1)$
- b) $(g \circ f)(2)$
- c) $(f \circ g)(3)$

Solución:

En este ejercicio debemos obtener la información necesaria a partir de las gráficas dadas

- a) $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + (-1) = 0$
- b) $(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[2] = 0$
- c) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f[1] = 1$

Respuestas:

Los resultados de las operaciones indicadas son: a. 0 , b. 0 , c. 1

.....

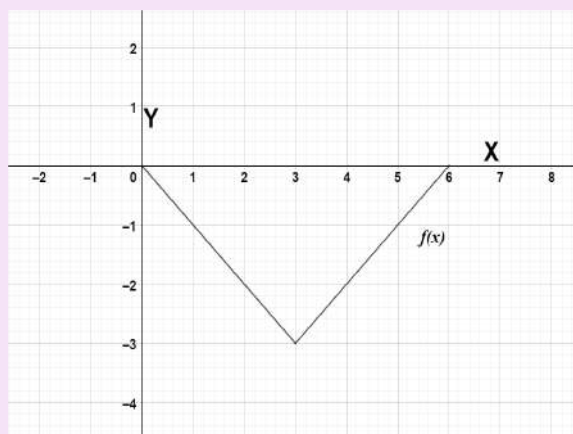
7.2 Ejercicios para la autoevaluación

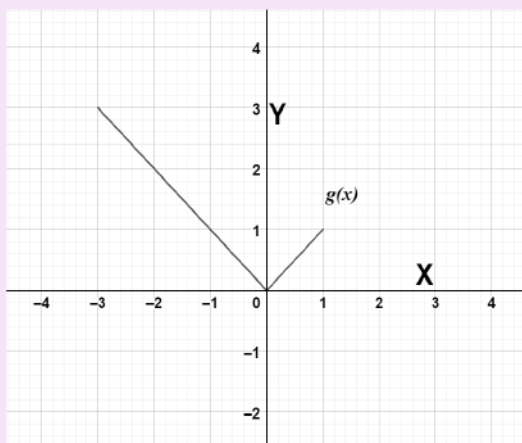
- Si $h(x) = x^3 - 1$ y $r(x) = -2x + 1$ determinar los valores indicados

- a) $(r - h)(-2)$, **R/14**
 b) $(h + r)(5)$, **R/115**
 c) $(h \circ r)(0)$, **R/0**
 d) $\left(\frac{h}{r}\right)(4)$, **R/-9**
2. Si $f(x) = 3x + 1$ y $r(x) = \sqrt{x+2}$, determinar:
 a) $(f \circ g)(x)$, **R/3($\sqrt{x+2}$)+1**
 b) $(g \circ f)(x)$, **R/ $\sqrt{3x+3}$**
 c) $(f \circ f)(x)$, **R/9x+4**
 d) $(g \circ g)(x)$, **R/ $\sqrt{\sqrt{x+2}+2}$**
3. Dadas $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = -x + 2$ determinar una expresión para:
 $(h \circ g \circ f)(x)$
R/ $-\sqrt{x^2+1}+2$
4. Con base a la información en la tabla determinar:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	0	3	4
$g(x)$	10	5	2	1	2	5

- a) $(g - f)(2)$, **R/1**
 b) $(f/g)(-3)$, **R/-1/10**
 c) $(g \circ f)(-1)$, **R/2**
 d) $(g \circ g)(0)$, **R/2**
5. Determinar los valores indicados, con base en las gráficas que se muestran.





- a) $(f * g)(1)$, **R/-1**
- b) $(g \circ g)(1)$, **R/1**
- c) $(g \circ f)(3)$, **R/3**

Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.