



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo III: Ecuaciones

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería **Fascículo III: Ecuaciones**

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Noviembre de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Ecuaciones lineales	9
2.1	Ejercicios resueltos	10
2.2	Ejercicios para autoevaluación	17
3	Ecuaciones cuadráticas	19
3.1	Ejercicios resueltos	20
3.2	Ejercicios para autoevaluación	29
4	Ecuaciones de otros tipos	31
4.1	Ejercicios resueltos	31
4.2	Ejercicios para autoevaluación	39
5	Modelado de ecuaciones lineales	41
5.1	Ejercicios resueltos	41
5.2	Ejercicios para autoevaluación	50
6	Modelado de ecuaciones cuadráticas	53
6.1	Ejercicios resueltos	53
6.2	Ejercicios para autoevaluación	64
7	Desigualdades	67
7.1	Ejercicios resueltos	68

7.2	Ejercicios para autoevaluación	72
	Bibliografía	73

A vibrant image of the Aurora Borealis (Northern Lights) in shades of green and purple, dancing over a dark silhouette of a forest. The lights create a dramatic, ethereal atmosphere.

1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo III: Ecuaciones

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala



2. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones son expresiones matemáticas que representan la equivalencia entre dos condiciones, se caracterizan por incluir cantidades conocidas y cantidades desconocidas llamadas *incógnitas*. Así, resolver una ecuación significa encontrar los valores que hacen verdadera la igualdad.

Las incógnitas se representan por letras, la más usual es x . Para resolver ecuaciones se aplican principios generales que pueden resumirse en:

- a) Si se suma o resta la misma cantidad en ambos lados de la ecuación, la igualdad se mantiene.
- b) Si se multiplica o divide ambos lados de una ecuación por una cantidad diferente de cero, la igualdad se mantiene.

En general, las operaciones que se realicen en uno de los lados de una ecuación, deben realizarse en el otro lado para mantener la equivalencia entre las expresiones.

Las propiedades de la relación de igualdad en el conjunto de los números reales, son muy útiles para la resolución de ecuaciones:

1. $a = a$ (Reflexividad)
2. Si $a = b$ entonces $b = a$ (Simetría)
3. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ (Transitividad)

Las ecuaciones lineales tienen la forma general

$$ax + b = 0$$

Donde $a \neq 0$, a y $b \in \mathbb{R}$.

Hay ecuaciones que en su forma inicial no se identifican con facilidad como una ecuación lineal, sin embargo, aplicando procedimientos algebraicos pueden ser reducidas a esta forma.

Están asociadas con las funciones lineales, que estudiaremos posteriormente y son de gran utilidad en la resolución de una gran variedad de situaciones.

.....

2.1 Ejercicios resueltos

1. Resuelva la siguiente ecuación para y

$$3(4y + 9) = 7(2 - 5y) - 2y$$

Solución:

El primer paso para resolver la ecuación es desarrollar las multiplicaciones indicadas.

$$12y + 27 = 14 - 35y - 2y$$

Ahora se reducen los términos semejantes en cada lado de la ecuación.

$$12y + 27 = 14 - 37y$$

Restamos $12y$ en ambos lados y simplificamos.

$$12y + 27 - 12y - 14 = 14 - 37y - 12y - 14$$

$$27 - 14 = -37y - 12y$$

$$13 = -49y$$

Finalmente, se dividen ambos lados de la ecuación entre -49

$$\frac{13}{-49} = \frac{-49y}{-49}$$

$$-\frac{13}{49} = y$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $-\frac{13}{49}$

.....

2. Resuelva la siguiente ecuación para y

$$a(y - a) - 2b(y - 3b) = ab$$

Solución:

El primer paso para resolver la ecuación es desarrollar las multiplicaciones indicadas.

$$ay - a^2 - 2by + 6b^2 = ab$$

Reordenamos todos los términos del lado izquierdo de la ecuación de modo que queden separados los que incluyen la incógnita.

$$ay - 2by - a^2 + 6b^2 = ab$$

Se suman y restan los factores que no incluyen la incógnita para que queden de un solo lado de la ecuación.

$$ay - 2by - a^2 + 6b^2 + a^2 - 6b^2 = ab + a^2 - 6b^2$$

$$ay - 2by = a^2 + ab - 6b^2$$

Aplicando el factor común en el lado izquierdo de la ecuación y factorizando el trinomio de la derecha se obtiene lo siguiente:

$$y(a - 2b) = (a + 3b)(a - 2b)$$

Se dividen ambos lados entre $a - 2b$, considerando que $a \neq 2b$

$$\frac{y(a - 2b)}{a - 2b} = \frac{(a + 3b)(a - 2b)}{a - 2b}$$

$$y = a + 3b$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $a + 3b$

.....

3. Resuelva la siguiente ecuación para y

$$\frac{1}{c - y} + \frac{2}{c + y} = \frac{1}{y}$$

Solución:

El primer paso será sumar las fracciones del lado izquierdo de la ecuación, buscando el denominador común para ambas.

$$\frac{1(c + y) + 2(c - y)}{(c - y)(c + y)} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{c + y + 2c - 2y}{(c - y)(c + y)} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{3c - y}{(c - y)(c + y)} = \frac{1}{y}$$

Para eliminar la incógnita de los denominadores multiplicaremos por $y(c - y)(c + y)$ ambos lados de la ecuación

$$y * (c - y)(c + y) * \frac{3c - y}{(c - y)(c + y)} = y * (c - y)(c + y) * \frac{1}{y}$$

$$y(3c - y) = (c - y)(c + y)$$

Ahora realizamos las operaciones indicadas en cada lado.

$$3cy - y^2 = c^2 - y^2$$

Operamos para que todos los términos que incluyan a la incógnita estén de un solo lado de la ecuación

$$3cy - y^2 + y^2 = c^2 - y^2 + y^2$$

$$[3cy - y^2 + y^2 = c^2]$$

$$3cy = c^2$$

Finalmente, dividimos dentro de $3c$ para despejar y .

$$\frac{3cy}{3c} = \frac{c^2}{3c}$$

$$y = \frac{c}{3}$$

Respuesta:

La solución de ecuación es $\frac{c}{3}$

.....

4. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$2(x+2)(x+5) = (2x+7)(x+3)$$

Solución:

Para encontrar la solución empezamos por realizar las multiplicaciones indicadas.

$$2(x^2 + 5x + 2x + 10) = 2x^2 + 6x + 7x + 21$$

$$2x^2 + 10x + 4x + 20 = 2x^2 + 6x + 7x + 21$$

Simplificando en cada lado de la ecuación, se obtiene:

$$2x^2 + 14x + 20 = 2x^2 + 13x + 21$$

Operando para que los términos que incluyen la incógnita estén de un solo lado de la ecuación, tenemos:

$$2x^2 + 14x - 2x^2 - 13x = 21 - 20$$

$$14x - 13x = 21 - 20$$

$$x = 1$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es 1.

.....

5. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$5(x-a) - 3(x+2b) = 4(a-b) - 7(x-b)$$

Solución:

El primer paso para poder resolver la ecuación consiste en realizar las multiplicaciones indicadas.

$$5x - 5a - 3x - 6b = 4a - 4b - 7x + 7b$$

Luego, se reducen los términos en cada lado de la ecuación:

$$2x - 5a - 6b = 4a - 7x + 3b$$

El siguiente paso es sumar y restar términos para que todos los que contengan a la incógnita se ubiquen de un solo lado de la ecuación:

$$2x - 5a - 6b + 7x + 5a + 6b = 4a - 7x + 3b + 7x + 5a + 6b$$

$$2x + 7x = 4a + 3b + 5a + 6b$$

$$9x = 9a + 9b$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación entre 9 para terminar de despejar x

$$x = a + b$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $a + b$.

.....

6. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$(2x + b)(x - a) - (x + b)(x + a) = x(x - a)$$

Solución:

El primer paso para encontrar la solución de la ecuación es desarrollar las multiplicaciones:

$$(2x^2 - 2ax + bx - ab) - (x^2 + ax + bx + ab) = x^2 - ax$$

$$2x^2 - 2ax + bx - ab - x^2 - ax - bx - ab = x^2 - ax$$

Reduciendo términos semejantes, obtenemos.

$$x^2 - 3ax - 2ab = x^2 - ax$$

Operamos para que todos los términos que incluyen la incógnita estén de un solo lado de la ecuación.

$$x^2 - 3ax - x^2 + ax = 2ab$$

Simplificamos los términos semejantes y despejamos x :

$$-3ax + ax = 2ab$$

$$-2ax = 2ab$$

$$x = \frac{2ab}{-2a}$$

$$x = -b$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $-b$.

.....

7. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$(4x + 5)(9x - 4) - (12x - 7)(3x + 4) = 6$$

Solución:

Iniciamos realizando las multiplicaciones indicadas.

$$(36x^2 - 16x + 45x - 20) - (36x^2 + 48x - 21x - 28) = 6$$

Reduciendo los términos semejantes.

$$(36x^2 + 29x - 20) - (36x^2 + 27x - 28) = 6$$

$$36x^2 + 29x - 20 - 36x^2 - 27x + 28 = 6$$

Reducimos nuevamente los términos semejantes y despejamos x .

$$2x + 8 = 6$$

$$2x = 6 - 8$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Solución:

La solución de la ecuación es -1 .

.....

8. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$(5x + 3)^2 + (8x + 15)(3x - 16) = (7x - 8)^2$$

Solución:

Para poder resolver la ecuación para x , el primer paso es desarrollar los cuadrados indicados.

$$(25x^2 + 30x + 9) + (24x^2 - 128x + 45x - 240) = (49x^2 - 112x + 64)$$

$$25x^2 + 30x + 9 + 24x^2 - 83x - 240 = 49x^2 - 112x + 64$$

Reduciendo términos semejantes, obtenemos.

$$49x^2 - 53x - 231 = 49x^2 - 112x + 64$$

$$-53x - 231 = -112x + 64$$

$$-53x + 112x = 64 + 231$$

$$59x = 295$$

$$x = \frac{295}{59}$$

$$x = 5$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es 5.

.....

9. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$x - \frac{5x+1}{6} + \frac{x-1}{2} = \frac{3x+1}{4} - \frac{x+5}{3} + \frac{4x-1}{9}$$

Solución:

Para encontrar la solución de la ecuación empezaremos por sumar las fracciones de cada lado de la ecuación.

$$\frac{6x - 5x - 1 + 3(x-1)}{6} = \frac{9(3x+1) - 12(x+5) + 4(4x-1)}{36}$$

El siguiente paso es realizar las multiplicaciones indicadas.

$$\frac{6x - 5x - 1 + 3x - 3}{6} = \frac{27x + 9 - 12x - 60 + 16x - 4}{36}$$

Reduciendo los términos semejantes, obtenemos.

$$\frac{4x-4}{6} = \frac{31x-55}{36}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 36

$$36 * \frac{4x-4}{6} = 36 * \frac{31x-55}{36}$$

$$6 * (4x-4) = 31x-55$$

$$24x-24 = 31x-55$$

$$55-24 = 31x-24x$$

$$31 = 7x$$

$$x = \frac{31}{7}$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $\frac{31}{7}$

.....

10. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$\frac{4(x-7)}{15} - \frac{2x+5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x+5}{15} - \frac{2(5x-3)}{5}$$

Solución:

Para solucionar la ecuación primero sumaremos las fracciones de cada lado.

$$\frac{4x-7-5(2x+5)-2(5)}{15} = \frac{15-4(x+5)-12[2(5x-3)]}{60}$$

Desarrollando las operaciones en cada fracción, obtenemos.

$$\frac{4x-7-10x-25-10}{15} = \frac{15-4x-20-12[10x-6]}{60}$$

$$\frac{4x-7-10x-25-10}{15} = \frac{15-4x-20-120x+72}{60}$$

Reduciendo los términos semejantes, tenemos:

$$\frac{-6x-42}{15} = \frac{67-124x}{60}$$

Multiplicando ambos lados por 60 y efectuando los productos indicados, obtenemos:

$$60 * \frac{-6x-42}{15} = \frac{67-124x}{60} * 60$$

$$4(-6x-42) = 67-124x$$

$$-24x-168 = 67-124x$$

Reduciendo la expresión despejamos x :

$$124x-24x = 168-67$$

$$100x = 101$$

$$x = \frac{101}{100}$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $\frac{101}{100}$

.....

2.2 Ejercicios para autoevaluación

1. Resuelva la siguiente ecuación para s
 $-2[s - (5 - 4s)] + 4 = -3s$ **R/ $s=2$**
2. Resuelva la siguiente ecuación para y
 $5(2y - 4) = 11 - (3 + 02y)$ **R/ $y=\frac{7}{3}$**
3. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $5a(5a + x) = 2a(2a - x)$ **R/ $x=-3a$**
4. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $7(3x + 2) - 6(2x + 8) = 11$ **R/ $x=5$**
5. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $x(a + b) + a(x + b) - b(x + a) - 8ab = 0$ **R/ $x=4b$**
6. Resuelva la siguiente ecuación para y
 $(y - 8)(y - 7) = (y - 9)(y - 5)$ **R/ $y=11$**
7. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $(8x + 7)(8x - 7) - (16x - 5)(4x + 3) = 36 - 14x$ **R/ $x=-5$**
8. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $(12x - 14)^2 + (5x - 11)^2 = (13x - 17)^2$ **R/ $x=-4$**
9. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $(x + a)^2 - (x - b)^2 = 2a(a + b)$ **R/ $x=\frac{a+b}{2}$**
10. Resuelva la siguiente ecuación para x
 $\frac{3x-5}{2} - 1 - \frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{4} = \frac{5x-1}{8}$ **R/ $x=5$**

3. Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Corresponde a un polinomio de grado 2, por lo que podemos encontrar dos valores de x .

Para resolver una ecuación cuadrática podemos hacerlo por medio de:

- a) Factorización
- b) Completación al cuadrado
- c) Aplicación de la fórmula general

Así, en términos de operación, inspeccionar la ecuación para identificar si admite una factorización inmediata, es la primera estrategia.

La fórmula para calcular las raíces de una ecuación general de segundo grado está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ determina las características de las soluciones. A la expresión $b^2 - 4ac = D$ se le llama discriminante, e indica:

- a) Si $D = 0$ entonces las soluciones son reales e iguales.
- b) Si $D > 0$ entonces las raíces son reales y distintas.
- c) Si $D < 0$ entonces las raíces son complejas.

A partir de la fórmula general sabemos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La suma de las raíces está dada por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

El producto de las raíces es:

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Las ecuaciones cuadráticas tienen muchas aplicaciones en la resolución de problemas, además, estudiaremos un grupo de ecuaciones que pueden reducirse a la forma cuadrática mediante técnicas y procedimientos algebraicos.

.....

3.1 Ejercicios resueltos

1. Resuelva la siguiente ecuación para m

$$\frac{3m}{2m-1} - \frac{39}{2m+1} = 5 - \frac{45}{4m^2-1}$$

Solución:

El primer paso para resolver la ecuación es sumar las fracciones del lado izquierdo y las expresiones del lado derecho.

$$\frac{3m(2m+1) - 39(2m-1)}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{5(4m^2-1) - 45}{4m^2-1}$$

Podemos reescribir el denominador de la fracción del lado izquierdo como $4m^2 - 1$, luego operamos el numerador de cada lado.

$$\frac{3m(2m+1) - 39(2m-1)}{4m^2-1} = \frac{5(4m^2-1) - 45}{4m^2-1}$$

$$\frac{6m^2 + 3m - 78m + 39}{4m^2-1} = \frac{20m^2 - 5 - 45}{4m^2-1}$$

Al tener el mismo denominador multiplicamos toda la ecuación por $4m^2 - 1$.

$$(4m^2 - 1) \frac{6m^2 + 3m - 78m + 39}{4m^2 - 1} = (4m^2 - 1) \frac{20m^2 - 5 - 45}{4m^2 - 1}$$

$$6m^2 + 3m - 78m + 39 = 20m^2 - 5 - 45$$

Reduciendo términos semejantes en cada lado, obtenemos:

$$6m^2 - 75m + 39 = 20m^2 - 50$$

Igualamos toda la expresión a 0 despejando hacia la derecha.

$$0 = 20m^2 - 50 - 6m^2 + 75m - 39$$

Reducimos términos y factorizamos la expresión:

$$0 = 14m^2 + 75m - 89$$

$$0 = (14m + 89)(m - 1)$$

Dado que, si un producto es igual a 0, uno de ambos factores debe ser igual a cero, las soluciones de la ecuación son:

$$0 = 14m + 89$$

$$-89 = 14m$$

$$m_1 = -\frac{89}{14}$$

$$0 = m - 1$$

$$1 = m$$

$$m_2 = 1$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son 1 y $-\frac{89}{14}$.

.....

2. Resuelva la ecuación para x

$$\frac{2x}{x+b} - \frac{x}{b-x} = \frac{b^2}{4(x^2 - b^2)}$$

Solución:

Como producto del análisis inicial, determinamos que el denominador de la fracción del lado derecho, se puede expresar como: $4(x^2 - b^2) = 4(x - b)(x + b)$. Los denominadores de las fracciones

del lado izquierdo se pueden adaptar a la forma anterior cambiando de signo a la segunda fracción y su denominador.

$$\frac{2x}{x+b} - \frac{x}{b-x} = \frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$$

$$\frac{2x}{x+b} + \frac{x}{x-b} = \frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$$

Si realizamos la suma de fracciones obtenemos:

$$\frac{2(x-b) + x(x+b)}{x+b} = -\frac{b^2}{4(x^2-b^2)} = 0$$

Efectuamos los productos indicados y simplificamos:

$$\frac{2x^2 - 2xb + x^2 + xb}{4(x+b)(x-b)} = \frac{b^2}{4(x-b)(x+b)}$$

$$\frac{3x^2 - xb}{4(x+b)(x-b)} = \frac{b^2}{4(x-b)(x+b)}$$

Al multiplicar la ecuación por el denominador común obtenemos:

$$3x^2 - xb = \frac{b^2}{4}$$

Factorizando la expresión encontramos las raíces

$$(3x-b)(4x-b) = 0$$

Así:

$$3x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{3}$$

$$4x - b = 0$$

$$x = \frac{b}{4}$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son $\frac{b}{3}$ y $\frac{b}{4}$.

3. Las raíces de la ecuación $x^2 + Px + 12 = 0$ presentan la siguiente relación: $x_1 - x_2 = 1$. Encuentre el valor de P para el cual se cumplen las condiciones.

Solución:

Se tiene una ecuación cuadrática con raíces x_1 y x_2 , podemos reescribir entonces la expresión de la siguiente manera:

$$x^2 + px + 12 = 0$$

$$(x + a)(x + b) = 0$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = 0$$

o también como

$$(x - a)(x - b) = 0$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

Así: $P = a + b$

De estas dos expresiones podemos decir que las raíces tomarían los valores de

$$x_1 = \pm a$$

$$x_2 = \pm b$$

Las dos raíces deben tener el mismo signo, además sabemos que la resta entre ellas da como resultado 1, por lo que podemos reescribir esa relación de la siguiente manera:

$$a - b = 1$$

$$a = 1 + b$$

Cuando las dos raíces son negativas.

$$-a - (-b) = 1$$

$$-a + b = 1$$

$$a = b - 1$$

Si las dos raíces son positivas tendremos lo siguiente:

$$a \times b = 12$$

Sustituyendo el valor de a en términos de b .

$$(b + 1)b = 12$$

$$b^2 + b = 12$$

$$b^2 + b - 12 = 0$$

Factorizando la expresión se obtiene

$$(b + 4)(b - 3) = 0$$

Las raíces serán:

$$b = -4$$

$$a = -4 + 1 = -3$$

Para el segundo factor:

$$b = 3$$

$$a = 3 + 1 = 4$$

El valor P se obtiene de sumar los dos factores a y b , para el primer valor de b se tiene:

$$p = a + b = -4 - 3 = -7$$

Para el segundo valor de b , se obtiene el siguiente valor para P

$$p = a + b = 3 + 4 = 7$$

Realizaremos el mismo procedimiento con las raíces negativas

$$a \times b = 12$$

Sustituyendo el valor de a en términos de b .

$$b^2 - b = 12$$

$$b^2 - b - 12 = 0$$

Factorizando la expresión se obtiene

$$(b - 4)(b + 3) = 0$$

Las raíces serán:

$$b = 4$$

$$a = 4 - 1 = 3$$

Para el segundo factor:

$$b = -3$$

$$a = -3 - 1 = -4$$

El valor P se obtiene de sumar los dos factores a y b , para el primer valor de b se tiene:

$$p = a + b = +4 + 3 = 7$$

Para el segundo valor de b , se obtiene el siguiente valor para P

$$p = a + b = -3 - 4 = -7$$

Ya sea con las dos raíces positivas o las dos raíces negativas encontramos los valores $P = \pm 7$, por lo que las ecuaciones resultantes serían:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Respuesta:

Los valores de P para los cuáles se cumplen las condiciones son 7 y -7 .

.....

4. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$(3x - 7)^2 = (4x + 1)^2$$

Solución:

El primer paso para resolver la ecuación es desarrollar los binomios al cuadrado de cada lado.

$$9x^2 - 42x + 49 = 16x^2 + 8x + 1$$

El siguiente paso es colocar todos los términos de un solo lado de la ecuación

$$0 = 16x^2 + 8x + 1 - 9x^2 + 42x - 49$$

Reduciendo términos semejantes

$$0 = 7x^2 + 50x - 48$$

Factorizamos la expresión

$$0 = (7x - 6)(x + 8)$$

Dado que la multiplicación de los factores es igual a 0, al menos uno de ellos debe ser cero, para encontrar las soluciones de la ecuación igualamos cada factor a 0.

$$0 = 7x - 6$$

$$6 = 7x$$

$$x_1 = \frac{6}{7}$$

Iguando el segundo factor a 0.

$$0 = x + 8$$

$$x = -8$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son $\frac{6}{7}$ y -8 .

5. Resuelva la siguiente ecuación para x

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Solución:

Al observar la ecuación dada podemos ver que es posible factorizar el trinomio, para ello utilizaremos los factores del primer y tercer término.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

Para que la multiplicación de los factores sea igual a 0, uno o ambos deben ser iguales a 0. Para el primer factor se tiene:

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

Ahora igualamos el segundo factor a 0.

$$x - 2 = 0$$

$$x_2 = 2$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son $\frac{1}{2}$ y 2.

.....

6. Determinar el valor de k para que las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x + k = 0$, sean iguales.

Solución:

En esta ecuación tenemos que: $a = 3$; $b = -4$ y $c = k$. Para que las soluciones de la ecuación sean iguales, debe cumplirse que $D = 0$, es decir $b^2 - 4ac = 0$. Al sustituir los valores de a , b y c obtenemos:

$$(-4)^2 - 4(3)(k) = 0$$

$$16 - 12k = 0$$

$$16 = 12k$$

$$k = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Respuesta:

El valor de k es $\frac{4}{3}$.

7. Encontrar una ecuación cuadrática cuyas raíces sean la suma y el producto de las raíces de la ecuación

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Solución:

Para la ecuación tenemos que $a = 1$; $b = 2$ y $c = -15$, aplicando la teoría sobre la suma y multiplicación de raíces se tiene lo siguiente:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{1} = -15$$

Formar la ecuación a partir de los factores:

$$(x + 2)(x + 15)$$

La ecuación buscada es:

$$(x + 2)(x + 15) = 0$$

$$x^2 + 17x + 30 = 0$$

Respuesta:

La ecuación buscada es $x^2 + 17x + 30 = 0$

.....

8. Dada la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$, determinar sus raíces.

Solución:

Al calcular el discriminante de la ecuación dado por: $D = b^2 - 4ac$, obtenemos

$$D = 36 - 4(1)(10) = -4$$

EL valor del discriminante es menor a 0 por lo que las raíces de la ecuación son complejas.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2}$$

Las raíces serán entonces:

$$x_1 = 3 + i$$

$$x_2 = 3 - i$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = 3 + i$ y $x_2 = 3 - i$.

9. Resolver la ecuación completando al cuadrado

$$3x^2 - 6x - 5 = 0$$

Solución:

Iniciamos dividiendo la ecuación por $a = 3$, luego despejamos el término constante.

$$x^2 - 2x = \frac{5}{3}$$

Completamos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo y agregamos la misma cantidad en el lado derecho, factorizamos y simplificamos.

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{5}{3} + 1$$

$$(x - 1)^2 = \frac{8}{3}$$

Solo hace falta despejar x :

$$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} + 1$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \cong 2.63$ y $x_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}} \cong -0.63$

.....

10. Resolver la ecuación aplicando la fórmula cuadrática

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Solución:

En este caso tenemos que $a = 2$; $b = -5$ y $c = 3$, sustituimos estos valores y calculamos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

Respuesta:

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = 1$.

3.2 Ejercicios para autoevaluación

1. Resuelva la ecuación para t

$$\frac{5t}{2t^2 - t - 1} - \frac{4t - 5}{t^2 - 1} = \frac{5}{2t + 1} \quad \mathbf{R/} \quad t_1 = 2 \text{ y } t_2 = -\frac{5}{8}$$

2. Resuelva la ecuación para y

$$y(y - 1) = 2(y^2 - 6) \quad \mathbf{R/} \quad y_1 = -4 \text{ y } y_2 = 3$$

3. Resuelva la ecuación para s

$$(s + 3)(3s - 8) = (s + 3)(7 - s) \quad \mathbf{R/} \quad s_1 = -3 \text{ y } s_2 = \frac{15}{4}$$

4. Resuelva la ecuación para b

$$1 + \frac{2}{b - 1} = \frac{2}{b^2 - b} \quad \mathbf{R/} \quad b_1 = 1 \text{ y } b_2 = -2$$

5. Resuelva la ecuación para x

$$\frac{2x + 11}{x + 4} + \frac{x - 2}{x - 4} = \frac{12}{x^2 - 16} + \frac{7}{2} \quad \mathbf{R/} \quad x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 8$$

6. Determine el valor de k para que las raíces de la ecuación sean iguales. $2x^2 + 5x + k = 0 \quad \mathbf{R/}$

$$k = +\frac{25}{8}$$

7. Encontrar una ecuación cuadrática con coeficientes enteros cuyas raíces sean la suma y el producto de las soluciones de la siguiente ecuación. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\mathbf{R/} \quad 9x^2 - 9x - 10 = 0$$

8. Determinar las raíces de la siguiente ecuación. $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\mathbf{R/} \quad x_1 = -1 + i \text{ y } x_2 = -1 - i$$

9. Resolver la ecuación dada completando al cuadrado $2a^2 + 4a - 3 = 0$

$$\mathbf{R/} \quad x_1 = -1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ y } x_2 = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

10. Resolver la ecuación dada aplicando la fórmula cuadrática $5x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\mathbf{R/} \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{6}}{5} \text{ y } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}$$



4. Ecuaciones de otros tipos

Las ecuaciones llamadas de otros tipos incluyen radicales, exponentes fraccionarios o enteros, tanto positivos como negativos y valores absolutos.

Para resolverlas, aplicamos propiedades de la potenciación, factorización, operaciones con fracciones algebraicas y técnicas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.

Tanto en este tema como en otros posteriores, la técnica del cambio de variable o sustitución es de gran utilidad.

La idea básica es analizar la ecuación dada para identificar una forma lineal o cuadrática. En el caso de ecuaciones sencillas que incluyen valor absoluto, debemos tener presente que

$$|x| = a$$

significa que: $x = a$ o $x = -a$

.....

4.1 Ejercicios resueltos

1. Resuelva la siguiente ecuación:

$$3 + \sqrt{3x+1} = x$$

Solución:

Iniciamos por identificar el radical y despejarlo, a continuación elevamos ambos lados de la ecuación al cuadrado, para eliminar la raíz cuadrada y encontrar una ecuación de forma conocida:

$$\sqrt{3x+1} = x - 3$$

$$\sqrt{3x+1})^2 = (x-3)^2$$

$$3x+1 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 9x + 8$$

Al analizar la ecuación cuadrática anterior determinamos que es posible resolverla factorizando de la siguiente forma.

$$0 = (x-8)(x-1)$$

Igualando cada factor a 0 se obtiene que, $x_1 = 8$ y $x_2 = 1$.

Procedemos a evaluar la ecuación original en los valores de x :

$$\text{Para } x = 8: 3 + \sqrt{24+1} = 8$$

$$3 + \sqrt{25} = 8$$

$$3 + 5 = 8$$

$$8 = 8$$

$$\text{Para } x = 1: 3 + \sqrt{3+1} = 1$$

$$3 + \sqrt{4} = 1$$

$$3 + 2 \neq 1$$

Respuesta:

La única solución de la ecuación es $x = 8$.

.....

2. Resuelva la ecuación

$$\sqrt[4]{5x-4} = 2$$

Solución:

En este caso la ecuación incluye una raíz cuarta, que estudiamos es posible eliminar elevando a la cuarta potencia y resolver la ecuación resultante.

$$(\sqrt[4]{5x-4})^4 = 2^4$$

$$5x - 4 = 16$$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5} = 4$$

Al sustituir $x = 4$ en la ecuación original obtenemos:

$$\sqrt[4]{20-4} = 2$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$2 = 2$$

Respuesta:

La solución de la ecuación es $x = 2$.

.....

3. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{3x+7} = 1 - \sqrt{x+2}$$

Solución:

En este ejercicio se involucran dos radicales por lo que una estrategia funcional aunque no obligatoria, es despejar una de las raíces cuadradas y elevarla al cuadrado.

$$(\sqrt{3x+7})^2 = (1 - \sqrt{x+2})^2$$

$$3x+7 = 1 - 2\sqrt{x+2} + x+2$$

$$2\sqrt{x+2} = -2x - 4$$

$$\sqrt{x+2} = -(x+2)$$

Elevamos nuevamente al cuadrado

$$x+2 = [-(x+2)]^2$$

$$x+2 = x^2 + 4x + 4$$

$$0 = x^2 + 3x + 2$$

$$0 = (x+2)(x+1)$$

$x_1 = -2$ y $x_2 = -1$. Sustituimos estos valores en la ecuación original.

Para $x_1 = -2$

$$\sqrt{-6+7} + \sqrt{-2+2} = 1$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$$

$$1 = 1$$

Para $x_2 = -1$

$$\sqrt{-3+7} + \sqrt{-1+2} = 1$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{1} \neq 1$$

Respuesta:

La única raíz de la ecuación es $x = -2$.

.....

4. Resuelva la ecuación

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Solución:

En este tipo de ecuaciones, podemos identificar la estructura de una ecuación cuadrática, ya que $x^4 = (x^2)^2$, en este caso podemos resolver de forma directa para x^2 y para x , o bien podemos realizar un cambio de variable.

Resolvemos primero factorizando el trinomio:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

Entonces:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

También

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

Para ejemplificar la técnica de sustitución, hacemos $u = x^2$ y $u^2 = (x^2)^2 = x^4$ escribimos la ecuación en términos de u y resolvemos.

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 4)(u - 1) = 0$$

$$[u = 4 \quad \text{y} \quad u = 1]$$

Para finalizar el proceso, igualamos los valores de u a x^2

$$u=4; x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$u=1; x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son ± 2 y ± 1 .

.....

5. Resuelva la siguiente ecuación

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$$

Solución:

Al analizar la ecuación, determinamos que $(x^3)^2 = x^6$, por lo que tiene la estructura de una función cuadrática.

Resolvemos por factorización;

$$(x^3 + 8)(x^3 - 1) = 0$$

$$x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

Luego

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

Si la resolvemos sustituyendo $u = x^3$ y $u^2 = x^6$, tenemos

$$u^2 + 7u - 8 = 0$$

$$(u + 8)(u - 1) = 0$$

$$[u = -8 \quad y \quad u = 1]$$

Sustituimos los valores de u y tenemos:

$$-8 = x^3 \Rightarrow x = -2$$

$$1 = x^3 \Rightarrow x = 1$$

Respuesta:

La soluciones de la ecuación son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$.

.....

6. Resuelva la ecuación

$$(2x + 5)^2 - (2x + 5) - 6 = 0$$

Solución:

En la ecuación se distinguen tres términos $(2x + 5)^2$, $(2x + 5)^1$ y -6 , notemos la forma de una ecuación cuadrática para $2x + 5$. Esto sugiere realizar un cambio de variable y sustituirla en la ecuación.

$$u = 2x + 5 \quad y \quad (u)^2 = (2x + 5)^2$$

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$(u - 3)(u + 2) = 0$$

Igualemos cada factor a 0, tenemos:

$$u - 3 = 0$$

$$u = 3$$

$$u + 2 = 0$$

$$u = -2$$

Sustituimos el valor de u para determinar x

$$u = 3$$

$$3 = 2x + 5$$

$$-2 = 2x$$

$$-1 = x$$

Luego para $u = 2$

$$u = -2$$

$$-2 = 2x + 5$$

$$-7 = 2x$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son $x_1 = -1$ y $x_2 = -\frac{7}{2}$

7. Resuelva la ecuación

$$\frac{(x+1)^{1/5}(x-6)^{2/3}}{x^{1/2}} = 0$$

Solución:

La ecuación se plantea como una fracción algebraica cuyo valor es cero, para lo cual se requiere que el denominador $x^{1/2} \neq 0$, es decir $x \neq 0$

El único caso en el que el valor de una fracción es cero, es cuando el numerador es cero. En este caso, debe cumplirse que:

$$(x+1)^{1/5}(x-6)^{2/3} = 0$$

Es decir,

$$(x+1)^{1/5} = 0 \text{ ó }$$

$$(x-6)^{2/3} = 0$$

En el primer caso elevamos a la quinta potencia y obtenemos que.

$$[(x+1)^{1/5}]^5 = 0^5$$

$$(x+1) = 0$$

$$x = -1$$

Para el segundo factor, elevamos al exponente $\frac{3}{2}$ y obtenemos.

$$(x-6)^{2/3}]^{3/2} = 0^{3/2}$$

$$x-6 = 0$$

$$x = 6$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son $x_1 = -1$ y $x_2 = 6$.

.....

8. Resuelva la ecuación

$$4x^{1/2} - 9x^{1/4} + 4 = 0$$

Solución:

Las estrategias aplicadas en los casos anteriores sugieren realizar una sustitución para reducir la ecuación a una forma cuadrática, aunque no es tan obvio como antes.

La idea es, identificar si una de las incógnitas se expresa como cuadrado de la otra, es decir, si se distingue.

x^n y x^{2n}

Hacemos: $u = x^{1/4}$ y $u^2 = (x^{1/4})^2 = x^{2/4} = x^{1/2}$

Ahora, expresamos la ecuación para u y resolvemos.

$$4x^{1/2} - 9x^{1/4} + 4 = 0$$

$$4u^2 - 9u + 4 = 0$$

$$u = \frac{9 \pm \sqrt{(81 - 4(4)(4))}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$u = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \cong 1.64$$

$$u = \frac{9 - \sqrt{17}}{8} \cong 0.6$$

Sustituimos u para determinar valores de x :

$$1.64 = x^{1/4}$$

$$1.64)^4 = x$$

$$x \cong 7.23$$

$$0.61 = x^{1/4}$$

$$0.61)^4 = x$$

$$x \cong 0.14$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son: $x_1 \cong 7.23$ y $x_2 \cong 0.14$.

.....

9. Resuelva la ecuación

$$2x^{-2} - 3x^{-1} - 4 = 0$$

Solución:

Esta ecuación es diferente porque los exponentes son negativos, podemos continuar ensayando una sustitución o bien, trabajar primero los exponentes negativos.

Iniciamos con la sustitución.

$$u = x^{-1} \text{ y } u^2 = (x^{-1})^2 = x^{-2}$$

Reescribimos la ecuación y la resolvemos para u :

$$2u^2 - 3u - 4 = 0$$

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-4)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4}$$

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4} = x^{-1}$$

Sustituimos u para determinar x

$$\frac{3 + \sqrt{41}}{4} = x^{-1}$$

$$\frac{3 + \sqrt{41}}{4} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{4}{3 + \sqrt{41}} \cong 0.43$$

Para la otra raíz

$$\frac{3 - \sqrt{41}}{4} = x^{-1}$$

$$\frac{3 - \sqrt{41}}{4} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{4}{3 - \sqrt{41}} \cong -1.18$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son: $x_1 \cong 0.43$ y $x_2 \cong -1.18$.

.....

10. Resuelva la siguiente ecuación

$$|3x + 2| = 5$$

Solución:

Para resolver esta ecuación, procedemos así:

$$3x + 2 = -5$$

$$3x = -7$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

Ahora con el signo cambiado.

$$3x + 2 = 5$$

$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

Respuesta:

Las raíces de la ecuación son: $x_1 = -\frac{7}{3}$ y $x_2 = 1$.

.....

4.2 Ejercicios para autoevaluación

1. Resuelva la siguiente ecuación: $2 + \sqrt{12 - 2x} = x$
R/ 4

2. Resuelva la ecuación $\sqrt[3]{4x^2 - 4x} = x$
R/ $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

3. Resuelva la ecuación: $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2$
R/ $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$

4. Resuelva la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$
R/ $x = \pm\sqrt{5}$

5. Resuelva la ecuación: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

R/ $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

6. Resuelva la ecuación: $(3x + 4)^2 - 6(3x + 4) + 9 = 0$

R/ $x = -\frac{1}{3}$

7. Resuelva la ecuación: $\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+7)^{\frac{2}{3}}} = 0$

R/ $x = 1$

8. Resuelva la ecuación: $2x^{\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$

R/ $x_1 = 27$ y $x_2 = -\frac{1}{8}$

9. Resuelva la ecuación: $x^{-2} - 2x^{-1} - 15 = 0$

R/ $x_1 = \frac{1}{5}$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$

10. Resuelva la ecuación: $|2x - 3| = 8$

R/ $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{11}{2}$

5. Modelado de ecuaciones lineales

5.1 Ejercicios resueltos

1. Halle tres números enteros impares consecutivos tales que el producto del primero y el tercero menos el producto del segundo y el primero supere en 3 al tercer número.

Solución:

El primer paso es definir como denotaremos a cada uno de los números, dado que son consecutivos llamaremos x al primero, nuestra notación será entonces:

Primer número : x

Segundo número: $x + 2$

Tercer número: $(x + 2) + 2 = x + 4$

Ahora escribimos lo indicado en términos de x .

$$x(x + 4) - x(x + 2) = (x + 4) + 3$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 4x - (x^2 + 2x) = x + 7$$

$$x^2 + 4x - x^2 - 2x = x + 7$$

$$4x - 2x = x + 7$$

$$2x - x = 7$$

$$x = 7$$

Al tener el valor de x podemos determinar el valor de los otros números

$$\begin{aligned}x &= 7, \\x + 2 &= 9 \\x + 4 &= 11\end{aligned}$$

Respuesta:

Los tres números enteros impares consecutivos son 7, 9 y 11.

.....

2. El señor Ramírez realizó dos inversiones cuya diferencia es de Q. 18,000.00. La inversión menor es al 7.8 % y la mayor al 8.6 %. Determine las cantidades invertidas si el ingreso anual total por intereses es de Q2,860.00.

Solución:

Lo primero que debemos definir es cuál será nuestra incógnita, en este caso podemos utilizar la siguiente notación.

Cantidad menor: x

Cantidad mayor: $x + 18,000$

Los porcentajes dados indican cuánto de la inversión se gana anualmente, hay que tomar en cuenta que los porcentajes nos indican que parte de la totalidad representa la tasa, tendremos entonces lo siguiente.

$$\frac{7.8}{100}x + \frac{8.6}{100}(x + 18,000) = 2,860$$

Reescribiendo los porcentajes como valores decimales se tiene lo siguiente:

$$0.078x + 0.086(x + 18000) = 2860$$

Ahora realizamos las operaciones indicadas y simplificamos.

$$0.078x + 0.086x + 1548 = 2860$$

$$0.078x + 0.086x = 2860 - 1548$$

$$0.164x = 1312$$

$$x = \frac{1312}{0.164}$$

$$x = 8000$$

Ahora que conocemos la cantidad menor podemos calcular la cantidad mayor, $Q8,000 + Q18,000 = Q26,000$

Respuesta:

Las cantidades invertidas fueron Q8,000.00 y Q26,000.00 a las tasas del 7.8 % y 8.6 % respectivamente.

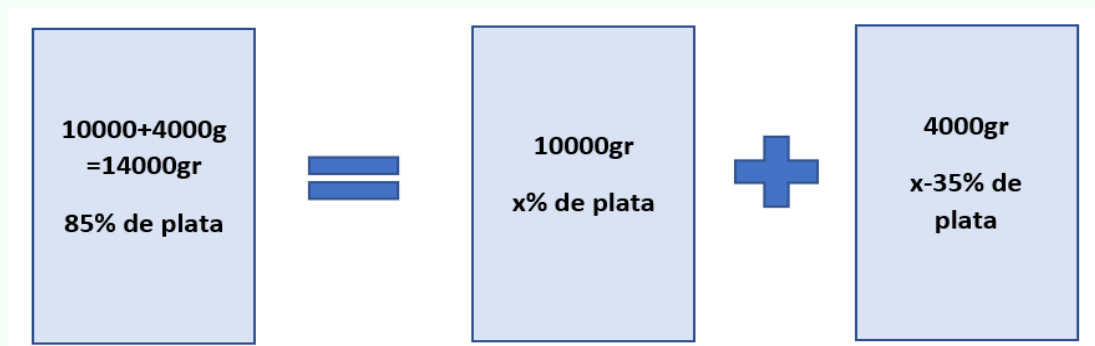
3. La Casa de la Moneda mezcló 10,000 gramos de una aleación de plata con 4,000 gramos de otra que contiene 35 % menos que la primera. Si la aleación final contiene 85 % de plata, ¿cuál es el porcentaje de este metal en cada aleación?

Solución:

Se tienen tres aleaciones, una de ellas es el resultado de la mezcla de las otras dos, conocemos la concentración de plata de esta última, sin embargo, no conocemos la concentración de las otras dos, solamente la relación entre ellas.

x = porcentaje de plata en la aleación de mayor peso

$x - 35$ = porcentaje de plata en la aleación de menor peso



Recordemos que al ser porcentajes los podemos reescribir como $\frac{x}{100}$ y $\frac{x-35}{100}$ respectivamente, nuestra expresión algebraica será entonces:

$$(10000 + 4000) \frac{85}{100} = 10000 \left(\frac{x}{100} \right) + 4000 \left(\frac{x-35}{100} \right)$$

Multiplicando ambos lados por 100,

$$(14000) 85 = 10000x + 4000(x - 35)$$

Desarrollando y simplificando las expresiones dadas:

$$1190000 = 10000x + 4000x - 140000$$

$$1190000 + 140000 = 14000x$$

$$1330000 = 14000x$$

$$x = \frac{1330000}{14000}$$

$$x = 95$$

Al tener el valor de x podemos decir que las concentraciones de metal en las aleaciones son 95 % y 60 %.

Respuesta:

Se utilizaron 10000 gramos al 95 % de plata y 4000 gramos al 60 % de plata en la mezcla.

.....

4. La abuela de Rosa María le explicó cómo se enviaban las cartas y las distintas estampillas postales que podían usarse. Por ejemplo, si ella compró Q10.70 de estampillas de 10, 15 y 25 centavos respectivamente, tiene 53 estampillas en total. Si el número de las de 25 centavos es 4 menos que el quíntuplo de las de 10 centavos, ¿cuántas consiguió de cada tipo?

Solución:

Se tienen tres tipos de estampillas, pero solamente se expresa la relación entre dos de ellas. Para encontrar cuántas hay de cada tipo, definiremos las siguientes relaciones entre las cantidades.

10 centavos: x

15 centavos: $5x - 4$

25 centavos: $53 - (x + (5x - 4)) = 57 - 6x$

Ahora relacionaremos cada cantidad de estampillas con el valor en centavos que le corresponde, recordemos que un centavo equivale a 0.01. Tendremos entonces:

Dinero en sello de 10 + Dinero en sellos de 15 + Dinero en sellos de 25 = Dinero total

$$0.10x + 0.15(57 - 6x) + 0.25(5x - 4) = 10.70$$

Se realizan las operaciones indicadas y se simplifica:

$$0.10x + 8.55 - 0.9x + 1.25x - 1 = 10.70$$

$$0.45x + 7.55 = 10.70$$

$$0.45x = 10.70 - 7.55$$

$$0.45x = 3.15$$

$$x = \frac{3.15}{0.45} = 7$$

Ahora que conocemos el número de estampillas de 10 centavos podemos calcular el resto.

$$5x - 4 = 5(7) - 4 = 31$$

$$57 - 6(7) = 15$$

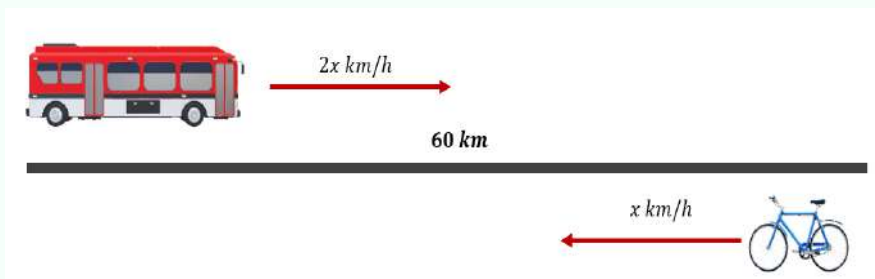
Respuesta:

Con Q10.70 se compraron 7 estampillas de 10 centavos, 15 estampillas de 15 centavos y 31 estampillas de 25 centavos.

5. Samuel viajó en autobús a una ciudad a 60 km de distancia y regresó a su casa en bicicleta. El autobús viajó al doble de la velocidad de la bicicleta. El viaje completo duró 4 horas y media. ¿A qué velocidad viajó Samuel en su bicicleta?

Solución:

El primer paso para resolver el problema será realizar un esquema de la situación. Representamos la velocidad en la bicicleta como x .



Sabemos que el tiempo total del recorrido es de 4.5 horas, por lo que sumaremos los tiempos de cada tramo para encontrar la velocidad de cada uno. La distancia recorrida en los dos viajes es la misma, 60 km. Para ello utilizaremos la expresión que relaciona la distancia, velocidad y tiempo.

$$d = v \times t$$

$$v = \frac{d}{t}$$

Tendremos entonces la siguiente expresión:

$$\text{Tiempo total} = \text{Tiempo viaje bus} + \text{Tiempo viaje en bicicleta}$$

$$4.5 = \frac{60}{2x} + \frac{60}{x}$$

Operamos y simplificamos.

$$4.5 = \frac{60(2) + 60}{2x}$$

Multiplcamos todo por $2x$

$$4.5(2x) = \left(\frac{120+60}{2x}\right) 2x$$

$$9x = 120 + 60$$

$$9x = 180$$

$$x = \frac{180}{9} = 20$$

La velocidad en el viaje de regreso es de 20 km/h por lo que la velocidad en el viaje de ida es de 40 km/h.

Respuesta:

La velocidad a la que iba la bicicleta era de 20 km/h.

6. Hace 2 años la edad de Carolina era $\frac{1}{5}$ de la de su padre y dentro de 4 años será $\frac{1}{3}$ de la de su papá. ¿Cuál es la edad actual del padre de Carolina?

Solución

Nos interesa saber la edad del padre por lo que definiremos a x como la edad que tenía hace dos años. Para entender la situación denotaremos las siguientes relaciones

	Carolina	Padre
Hace dos años	$\frac{x}{5}$	x
Dentro de 4 años	$\frac{x}{5} + 6$	$x + 6$

Reescribiendo las condiciones que se nos indicaron, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} + 6 &= \frac{1}{3}(x + 6) \\ 3\left(\frac{x}{5} + 6\right) &= \frac{1}{3}(x + 6)3 \\ \frac{3x}{5} + 18 &= x + 6 \\ 18 - 6 &= x - \frac{3x}{5} \\ 12 &= \frac{2x}{5} \\ x &= \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\end{aligned}$$

La edad del padre era 30 hace 2 años, por lo que su edad actual es de 32 años.

Se sugiere resolver el problema considerando que x sea la edad actual del padre.

Respuesta:

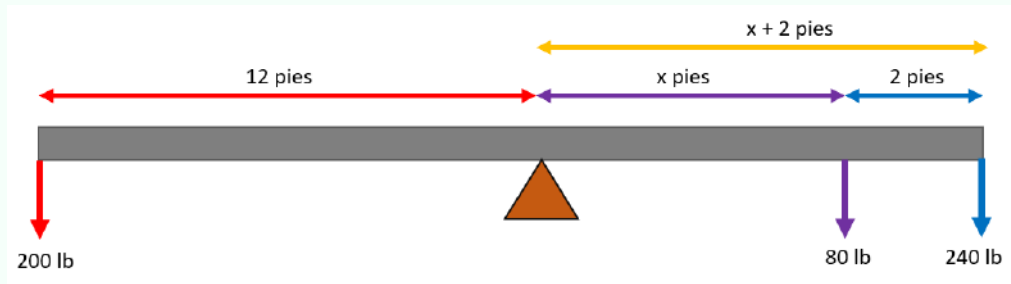
La edad del padre de Carolina en la actualidad es de 32 años.

.....

7. Una barra de peso despreciable está en equilibrio cuando una carga de 200 libras se sitúa a 12 pies de un lado del punto de apoyo, y dos cargas de 80 y 240 libras se encuentran a 2 pies de distancia entre sí del otro lado del punto de apoyo, con la carga de 80 libras más cercana al punto de apoyo. ¿A qué distancia del punto de apoyo se ubica la carga de 80 libras?

Solución:

Lo primero que debemos hacer es un esquema de la situación, nos dan tres se nos indica que 2 de ellas están a una distancia desconocida del punto de apoyo, la que está más cerca de este punto es la de 80 libras.



Para encontrar la distancia a la que se encuentra la carga de 80 libras aplicaremos el concepto de *brazo de palanca de la carga*, el mismo se calcula multiplicando la distancia de la carga al punto de apoyo, por el peso de la carga. Para que la barra esté en equilibrio los efectos de las cargas en ambos lados del punto de apoyo deben igualarse por lo que tendremos:

$$200(12) = 80x + 240(x + 2)$$

Operando y simplificando obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2400 &= 80x + 240x + 480 \\ 2400 - 480 &= 80x + 240x \\ 1920 &= 320x \\ x &= \frac{1920}{320} = 6 \end{aligned}$$

La carga más cercana está a 6 pies por lo que la otra carga debe estar a $6 + 2 = 8$ pies del punto de apoyo.

Respuesta:

La carga de 80 libras esta posicionada a 6 pies del punto de apoyo.

.....

8. Una construcción se asienta en un terreno rectangular que mide de largo 10 pies menos que el doble de su ancho. La banqueta que rodea la construcción tiene 8 pies de ancho y su área es 2496 pies cuadrados. Determine las dimensiones del terreno de construcción.

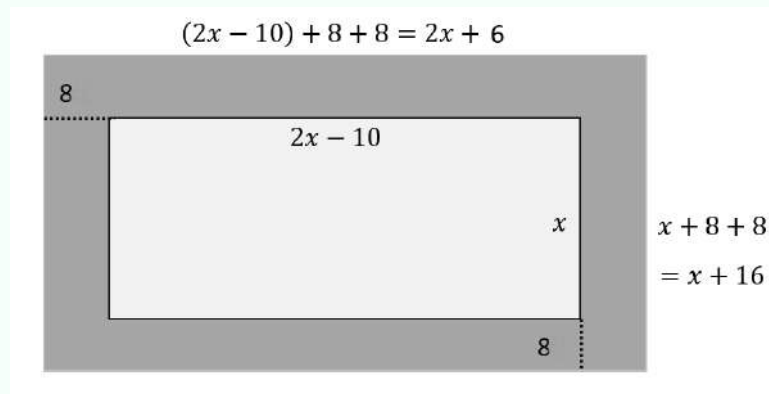
Solución:

Tenemos una construcción rodeada por una banqueta de ancho uniforme, para encontrar las dimensiones del terreno definiremos lo siguiente:

Ancho del terreno: x

Largo del terreno: $2x - 10$

Realizamos un esquema de la situación para determinar las dimensiones.



Se conoce el área de la banqueta que rodea la construcción, 2496 pies cuadrados, esta área equivale al área total menos el área de la construcción, es decir, el área del rectángulo grande menos el área del rectángulo interior. En ambos casos el área es la base por la altura del rectángulo.

$$2496 = (2x + 6)(x + 16) - (2x - 10)(x)$$

Operamos y simplificamos.

$$2496 = 2x^2 + 32x + 6x + 96 - (2x^2 - 10x)$$

$$2496 = 2x^2 + 32x + 6x + 96 - 2x^2 + 10x$$

$$2496 = 38x + 96 + 10x$$

$$2496 - 96 = 38x + 10x$$

$$2400 = 48x$$

$$x = \frac{2400}{48} = 50$$

El ancho del terreno es de 50 pies, por lo que el largo mide $2(50) - 10 = 90$ pies.

Respuesta:

Las dimensiones del terreno de la construcción son de 50 por 90 pies.

.....

9. La suma de la base y la altura de un triángulo es 63 pies. Obtenga el área del triángulo si el triple de su base supera en 7 pies al cuádruplo de su altura.

Solución:

El primer paso será hacer definir la relación entre las variables para poder encontrar el área del triángulo.

Altura = x

Base = $63 - x$

Ahora reescribimos de acuerdo con las condiciones dadas:

$$3(63 - x) = 4x + 7$$

Operamos y simplificamos.

$$189 - 3x = 4x + 7$$

$$189 - 7 = 4x + 3x$$

$$182 = 7x$$

$$x = \frac{182}{7} = 26$$

Ahora que conocemos la altura del triángulo podemos calcular la base del mismo:

$$b = 63 - 26 = 37$$

Finalmente, calculamos el área del triángulo, la misma está dada por la siguiente expresión:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Sustituyendo los valores encontrados, $A = \frac{37 \times 26}{2} = 481 \text{ pies}^2$

Respuesta:

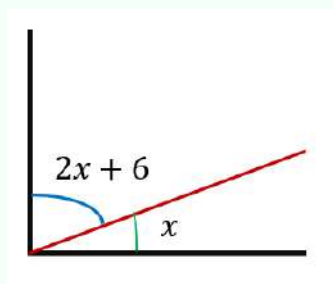
El área del triángulo es de 481 pies^2 .

.....

10. Uno de dos ángulos complementarios mide 6° más que el doble del otro ángulo. Encuentre las medidas de los dos.

Solución:

El primer paso para encontrar la medida de los ángulos será realizar un esquema, sabemos que los ángulos son complementarios, por lo que su suma debe ser igual a 90° .



Tendremos entonces lo siguiente:

Ángulo menor = x

Ángulo mayor = $2x + 6$

Reescribimos la relación en términos de x

$$90 = x + 2x + 6$$

$$90 - 6 = 3x$$

$$84 = 3x$$

$$x = \frac{84}{3} = 28^\circ$$

Ahora que conocemos la medida del ángulo menor podemos calcular la del ángulo mayor

$$2(28) + 6 = 62^\circ$$

Respuesta:

Las medidas de los ángulos son 28° y 62° .

.....

5.2 Ejercicios para autoevaluación

- Halle dos números cuya diferencia sea 8 y la de sus cuadrados supere en 20 a 13 veces el número mayor.
R/ Los números son 28 y 20.
- Francisco tiene Q12,000.00 invertidos al 5.5 %, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al 8 % para que su ingreso anual total sea igual al 7 % de la inversión total?
R/ Francisco necesita de Q18,000.00 adicionales para ganar el 7 % del total.
- Una planta procesadora de alimentos desea producir 1200 litros de mermelada con 55 % de azúcar. Si disponen de mermelada con 30 % de azúcar y otra con 70 %, ¿qué cantidad de cada clase deben utilizar?
R/ Deben utilizarse 450 litros al 30 % de azúcar y 750 al 70 % de azúcar.
- El dueño de una cafetería mezcla 2 clases de café, uno vale Q22.32 la libra y el otro Q24.72 la libra. La mezcla resultante pesa 400 libras y la vende la libra a Q23.60, ¿cuántas libras de cada clase de grano usó en la mezcla.
R/ El dueño de la cafetería utilizó 186.67 libras de Q22.32 y 213.33 libras de Q24.72.
- Dos clubes de alpinismo que se hallan a 25 km entre sí; decidieron acampar juntos en cierto punto intermedio. Si uno de ellos camina $\frac{1}{3}$ km/h más a prisa que el otro y se encuentran después de caminar 3 horas, ¿cuál es la velocidad de cada club?
R/ El club más lento camina a $4\frac{1}{3}$ km/h y el club más rápido a 4 km/h.
- Hace dos años Cristina tenía $\frac{1}{9}$ de la edad que le correspondía a su mamá. Dentro de 16 años, Cristina tendrá $\frac{7}{15}$ de la edad de su mamá. ¿Cuál es la edad actual de la mamá de Cristina?
R/ La edad actual de la mamá de Cristina es 29 años.
- Una barra de peso despreciable se equilibra si una carga de 300 libras se coloca a 12 pies de un lado del punto de apoyo y dos cargas que difieren en 150 libras se sitúan del otro lado de dicho punto de tal modo que la carga menor queda a 16 pies del punto de apoyo y la mayor a 9 pies de éste. Encuentre los valores de las cargas

R/ La carga menor es de 90 libras y la carga mayor es de 240 libras.

8. La longitud de un cuarto es de 9 pies menos que el doble de su anchura. La alfombra del cuarto está a 1.5 pies de las paredes. El área descubierta del piso es de 99 pies cuadrados. Encuentre las dimensiones de la alfombra.

R/ Las dimensiones de la alfombra son de 12 por 18 pies.

9. La base y la altura de un triángulo suman 104 pies. Encuentre el área del triángulo si el cuádruplo de la base es 24 pies menor que el triple de la altura.

R/ El área del triángulo es de 1293.06 pies cuadrados.

10. Si uno de dos ángulos suplementarios es el cuádruplo del otro más 5 unidades, obtenga dichos ángulos.

R/ Los ángulos son 35° y 145° .

6. Modelado de ecuaciones cuadráticas

6.1 Ejercicios resueltos

1. El producto de dos números pares consecutivos es 10 unidades menor que 13 veces el siguiente número par. Halle los tres primeros números.

Solución:

Al tener números pares consecutivos habrá siempre un número impar entre los números desconocidos, por lo que tendremos que:

Primer número: x

Segundo número: $x + 2$

Tercer número: $x + 4$

La relación indicada es que si se multiplican los primeros dos números su resultado será 10 unidades menor que multiplicar el tercer número por 13, escribiendo esto con expresiones algebraicas.

$$x(x + 2) = 13(x + 4) - 10$$

Realizando las operaciones y simplificando.

$$x^2 + 2x = 13x + 52 - 10$$

$$x^2 + 2x - 13x - 52 + 10 = 0$$

$$x^2 - 11x - 42 = 0$$

Factorizando la expresión reducida, tenemos:

$$(x - 14)(x + 3) = 0$$

Igualando cada uno de los factores a 0,

$$x - 14 = 0$$

$$x = 14$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ahora que tenemos las dos soluciones de la ecuación podemos observar que solo una de ellas cumple las condiciones dado que -3 no es un número par.

Así, el primer número encontrado es 14, los siguientes números pares son 16 y 18.

Respuesta:

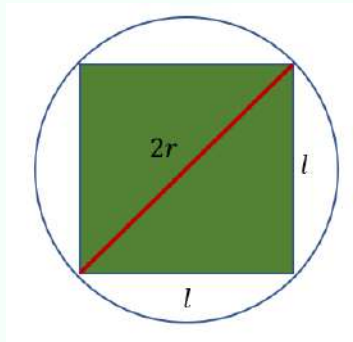
Los números pares buscados son 14, 16 y 18.

.....

2. Un aspersor de agua ajustable que riega en un patrón circular se coloca en el centro de un campo cuadrado cuya área es 1250 pies cuadrados. ¿Cuál es el menor radio que se podría usar si se debe cubrir por completo el campo dentro del círculo?

Solución:

El primer paso es realizar un esquema de la situación. Tenemos un cuadrado inscrito en un círculo de radio r , el diámetro del círculo está sobre la diagonal del cuadrado. La estrategia será encontrar el lado del cuadrado para luego encontrar el radio del círculo.



El área del cuadrado está dada por:

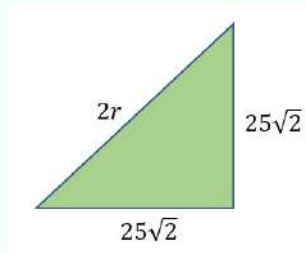
$$A_C = l^2$$

Conocemos el área del cuadrado por lo que el lado de este será:

$$1250 = l^2$$

$$l = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$$

Ahora que tenemos los lados del cuadrado los utilizaremos para encontrar el radio del círculo, al observar la siguiente figura podemos ver que la diagonal del cuadrado genera un triángulo rectángulo, sabemos que ésta es a su vez igual al diámetro del círculo y, que éste será igual a 2 veces el radio.



Aplicaremos el teorema de Pitágoras para encontrar el valor del radio.

$$(2r)^2 = (25\sqrt{2})^2 + (25\sqrt{2})^2$$

$$4r^2 = 625 * 2 + 625 * 2$$

$$4r^2 = 1250 + 1250$$

$$4r^2 = 2500$$

$$r^2 = \frac{2500}{4} = 625$$

$$r = 25$$

Respuesta:

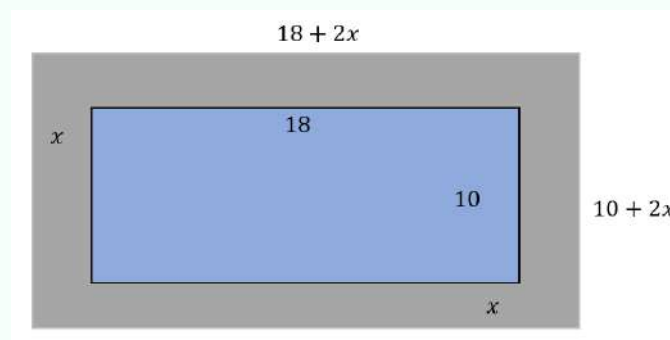
El círculo debe tener un radio de 25 pies.

.....

3. La piscina en el patio posterior de una casa tiene forma rectangular con 10 metros de ancho y 18 metros de largo. Está rodeada por un pasillo de ancho uniforme cuya área mide 60 metros cuadrados. ¿Cuánto mide el ancho del pasillo?

Solución:

El primer paso para resolver el problema será realizar un esquema de la situación:



El área del pasillo A_P es el área total menos el área de la piscina. Dado que ambos son rectángulos, las áreas se calcularán como el producto de base por altura. Reescribimos las áreas en términos de x . Calculamos el área total y el área de la piscina.

$$A_P = 10 * 18 = 180$$

$$A_T = (10 + 2x)(18 + 2x)$$

Tendremos entonces que el área del pasillo es la resta de las dos áreas que encontramos.

$$A_B = A_T - A_P$$

$$60 = (10 + 2x)(18 + 2x) - 180$$

Operamos y simplificamos,

$$60 = 180 + 20x + 36x + 4x^2 - 180$$

$$60 = 56x + 4x^2$$

$$0 = 4x^2 + 56x - 60$$

$$0 = x^2 + 14x - 15$$

$$0 = (x + 15)(x - 1)$$

Igualamos cada factor a 0

$$0 = x + 15$$

$$x_1 = -15$$

$$0 = x - 1$$

$$x_2 = 1$$

Dado que no se puede tener un ancho negativo, -15 no es una solución para el problema por lo que la única solución es 1.

Respuesta:

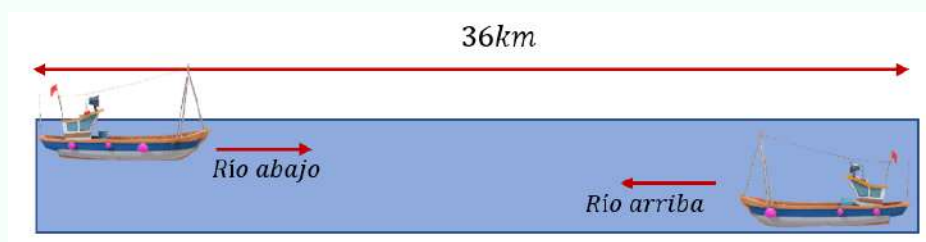
El pasillo alrededor de la piscina tiene un ancho uniforme de 1 metro.

.....

4. Una barca navega río abajo (con la corriente) y luego realiza el viaje de regreso, río arriba (contra la corriente). El viaje río abajo duró $\frac{3}{4}$ de hora menos que el recorrido río arriba. Si la velocidad de la corriente es de 4 km/h, encuentre la velocidad de la barca en agua inmóvil y el tiempo que duró cada parte del viaje.

Solución:

El primer paso será realizar un pequeño esquema de la situación. La barca realiza un recorrido de ida y vuelta. Si el agua estuviera inmóvil la velocidad de la barca sería constante, pero por la corriente río arriba irá más lento que río abajo. La distancia que recorren es la misma, 36 km.



Tendremos entonces lo siguiente:

Velocidad en agua inmóvil: x

Ida: Velocidad río abajo $x + 4$

Regreso: Velocidad río arriba $x - 4$

Dado que conocemos la relación de los tiempos de viaje y la distancia recorrida en cada tramo, utilizaremos la siguiente expresión para encontrar la velocidad.

$$t = \frac{d}{v}$$

$$t_i = \frac{36}{v + 4}$$

$$t_r = \frac{36}{x - 4}$$

Tendremos entonces la siguiente expresión para los tiempos:

$$t_r - \frac{3}{4} = t_i$$

$$\frac{36}{x - 4} - \frac{3}{4} = \frac{36}{x + 4}$$

Sumando las fracciones,

$$\frac{36}{x - 4} - \frac{3}{4} - \frac{36}{x + 4} = 0$$

$$\frac{36(4)(x + 4) - 3(x - 4)(x + 4) - 36(4)(x - 4)}{4(x - 4)(x + 4)} = 0$$

Se multiplican ambos lados por $4(x - 4)(x + 4)$,

$$36(4)(x + 4) - 3(x - 4)(x + 4) - 36(4)(x - 4) = 0$$

Operando y simplificando,

$$144x + 576 - 3(x^2 - 16) - 144x + 576 = 0$$

$$576 - 3x^2 + 48 + 576 = 0$$

$$-3x^2 + 1200 = 0$$

$$3x^2 = 1200$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400} = 20$$

$$\text{Tiempo río arriba: } \frac{36}{20 - 4} = \frac{9}{4} = 2.25h$$

Tiempo río abajo: $\frac{36}{20+4} = \frac{3}{2} = 1.5h$

Respuesta:

La velocidad en agua inmóvil es de 20 km/h, el viaje río arriba duró $\frac{9}{4}$ horas y el viaje río abajo duró $\frac{3}{2}$ horas.

.....

5. Andrés demora 5 horas más que Carlos en realizar un trabajo. Si trabajan juntos pueden efectuar el trabajo en 6 horas, ¿cuánto tarda cada uno en hacerlo sólo?

Solución:

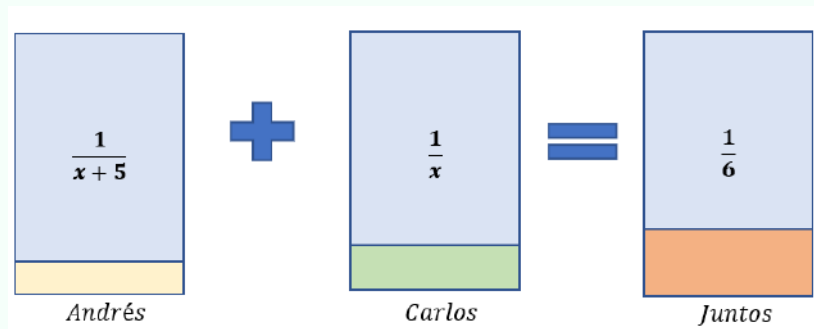
Lo primero que debemos hacer es determinar cuánto se tarda cada uno en términos de x .

Andrés: $x + 5$ horas

Carlos: x horas

Juntos: 6 horas

Ahora realizaremos un esquema para determinar qué fracción del trabajo realiza cada uno en una hora:



Ahora podemos calcular el trabajo realizado por hora

$$\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$$

Sumando las fracciones,

$$\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x} - \frac{1}{6} = 0$$

$$\frac{6x + 6(x+5) - x(x+5)}{6(x+5)(x)} = 0$$

Operamos y simplificamos,

$$6x + 6x + 30 - x^2 - 5x = 0$$

$$\begin{aligned}
 7x + 30 - x^2 &= 0 \\
 x^2 - 7x - 30 &= 0 \\
 (x - 10)(x + 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Igualemos cada factor a 0.

$$\begin{aligned}
 x - 10 &= 0 \\
 x_1 &= 10 \\
 x + 3 &= 0 \\
 x_2 &= -3
 \end{aligned}$$

Se descarta $x = -3$ pues el tiempo se asume positivo.

Respuesta:

Carlos se tarda 10 horas en hacer el trabajo y Andrés se tarda 15 horas.

.....

6. Una excursión escolar costó Q.120.00. Si hubieran ido 3 estudiantes más el costo por estudiante habría sido de Q2.00 menos. ¿Cuántos estudiantes fueron a la excursión?

Solución:

Tenemos la siguiente información:

Costo total: 120

Número de estudiantes $x + 3$

Costo por estudiante: $\frac{120}{x} - 2$

La relación al aumentar el número de estudiantes es:

$$\begin{aligned}
 &\frac{120}{x} - 2 - \frac{120}{x+3} \\
 &\frac{120(x+3) + 2x(x+3) - 120x}{x(x+3)} = 0 \\
 &120x + 360 - 2x^2 - 6x - 120x = 0 \\
 &-2x^2 - 6x + 360 = 0 \\
 &x^2 + 3x - 180 = 0 \\
 &0 = (x + 15)(x - 12)
 \end{aligned}$$

Igualemos cada factor a cero.

$$x + 15 = 0$$

$$x_1 = -15$$

$$x - 12 = 0$$

$$x_2 = 12$$

Dado que no se puede tener un número negativo de alumnos la única solución es 12 alumnos.

Respuesta:

12 alumnos fueron a la excursión.

.....

7. Una persona realizó un trabajo por Q.90.00. Empleó 3 horas más de lo que se suponía y entonces ganó Q5.00 menos por hora de lo que esperaba. ¿En cuánto tiempo se suponía que llevaría a cabo el trabajo?

Solución:

Lo primero que debemos determinar es cuánto esperaba ganar por hora, siendo x el número de horas que esperaba trabajar.

Por hora ganaría: $\frac{90}{x}$

Se tardó 3 horas más, trabajó $x + 3$ horas. Por hora ganó en realidad: $\frac{90}{x + 3}$

La relación en la ganancia por hora es la siguiente:

$$\frac{90}{x} - 5 = \frac{90}{x + 3}$$

$$\frac{90}{x} - 5 - \frac{90}{x + 3} = 0$$

Sumando las fracciones:

$$\frac{90(x + 3) - 5x(x + 3) - 90x}{x(x + 3)} = 0$$

Operando y simplificando

$$90(x + 3) - 5x(x + 3) - 90x = 0$$

$$90x + 270 - 5x^2 - 15x - 90x = 0$$

$$-5x^2 - 15x + 270 = 0$$

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

Igualando cada factor a 0

$$x - 6 = 0$$

$$x_1 = 6$$

$$x + 9 = 0$$

$$x_2 = -9$$

Al no poder tener horas de trabajo negativas se elimina la solución de -9

Respuesta:

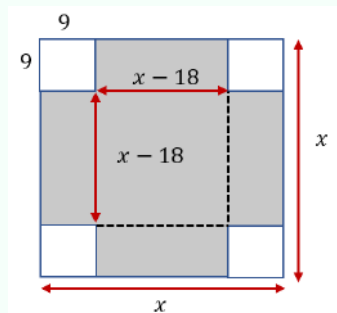
Debía terminar el trabajo en 6 horas.

.....

8. Un hombre desea construir una caja metálica sin tapa. La caja debe tener una base cuadrada, sus lados deben tener una altura de 9 pulgadas y la capacidad debe ser de 5184 pulgadas cúbicas. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de metal que debe comprar para construir la caja.

Solución:

La caja de base cuadrada tiene que salir de una pieza cuadrada de dimensiones desconocidas. Para que todos los lados tengan la misma altura deben cortarse cuadrados de 9 pulgadas de lado en cada esquina de la pieza como lo muestra la siguiente figura.



Como podemos ver, el lado de la pieza original se denota como x , al cortar los cuadrados de lado 9 y doblar en las líneas indicadas tendremos la caja de base cuadrada, dado que se eliminan dos cuadrados idénticos, el lado de la base de la caja será $x - 2(9) = x - 18$.

El volumen de la caja será entonces, el alto de los lados por el área de la base.

$$V = 9 * (x - 18) (x - 18)$$

$$5184 = 9 * (x - 18) (x - 18)$$

$$5184 = 9(x^2 - 36x + 324)$$

$$\frac{5184}{9} = x^2 - 36x + 324$$

$$576 = x^2 - 36x + 324$$

$$0 = x^2 - 36x - 252$$

$$0 = (x - 42)(x + 6)$$

Igualando cada factor a 0.

$$x - 42 = 0$$

$$x_1 = 42$$

$$x + 6 = 0$$

$$x_2 = -6$$

Respuesta:

La pieza de metal original debe ser de 42 por 42 pulgadas.

.....

9. Un joven emprendedor invierte Q.1440.00 en la compra de agendas que decora y vende a Q.80.00 cada una. Determine cuántas agendas compró si la ganancia que obtuvo al venderlas todas, equivale al dinero que invirtió en la compra de 16 agendas.

Solución:

Para empezar, definiremos nuestra variable de interés. Llamaremos x a la cantidad de agendas que compró. Dado que pagó Q.1440.00 por todas, el precio de compra de una agenda está dado por:

$$\frac{1440}{x}$$

Si las vendió todas a Q80.00 cada una, el ingreso por ventas será de $80x$.

Ahora bien, la ganancia es el dinero obtenido al vender menos el dinero invertido al comprar.

$$G = 80x - 1440$$

Se nos indica que el dinero que ha ganado equivale al costo de 16 agendas, esto es igual a

$$16 * \frac{1440}{x}$$

La siguiente ecuación resulta de igualar las dos expresiones para la ganancia.

$$80x - 1440 = \frac{16 * 1440}{x}$$

Multiplicamos por x y obtenemos:

$$80x^2 - 1440x = 16 * 1440$$

$$80x^2 - 1440x = 28040$$

$$80x^2 - 1440x - 28040 = 0$$

Dividimos por 80 y obtenemos:

$$x^2 - 18x - 288 = 0$$

Factorizando,

$$(x - 24)(x + 12) = 0$$

$$x - 24 = 0$$

$$x_1 = 24$$

$$x + 12 = 0$$

$$x_2 = -12$$

Dado que el número de agendas no puede ser negativo la solución $x = -12$ no es tomada en cuenta.

Respuesta:

El joven emprendedor compró 24 agendas en total.

.....

10. Carlos y Alejandro realizan un trabajo juntos en 4 horas. Carlos se tarda 6 horas más que Alejandro, determine el tiempo que se tarda cada uno.

Solución:

Para poder determinar cuánto se tarda cada uno primero necesitamos encontrar que fracción del trabajo realiza cada uno por hora. Para ello tendremos lo siguiente:

	Carlos	Alejandro
Tiempo solo	$t + 6$	t
Trabajo en 1 hora	$\frac{1}{t + 6}$	$\frac{1}{t}$

Se conoce el tiempo cuando trabajan juntos, 4 horas, por lo que en una hora se realizará el siguiente trabajo:

$$\frac{1}{t + 6} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$$

Sumando las fracciones del lado izquierdo de la ecuación, obtenemos:

$$\frac{t + t + 6}{t(t + 6)} = \frac{1}{4}$$

$$4(2t + 6) = t(t + 6)$$

$$8t + 24 = t^2 + 6t$$

$$0 = t^2 + 6t - 8t - 24$$

$$0 = t^2 - 2t - 24$$

$$0 = (t - 6)(t + 4)$$

Igualando cada factor a 0, determinamos valores de t :

$$0 = t - 6$$

$$t_1 = 6$$

$$0 = t + 4$$

$$t_2 = -4$$

Dado que no podemos tener tiempos negativos, se elimina esa solución .

Respuesta:

Alejandro se tarda 6 horas en realizar el trabajo mientras que Carlos se tarda 12 horas.

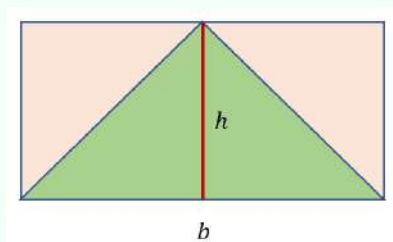
.....

6.2 Ejercicios para autoevaluación

1. La suma de dos números es 28 y la de sus cuadrados es 16 menos que el producto de los números. Determine dichos números.

R/ Los números son 20 y 8.

2. Un triángulo está inscrito en un rectángulo como se muestra en la figura. La altura del triángulo mide 4 centímetros menos que la base sobre la cuál está trazada. El área del rectángulo es de 21 centímetros cuadrados. Encuentre las dimensiones del rectángulo.



R/ Las dimensiones del rectángulo son 3 por 7 centímetros.

3. Si cada uno de los lados opuestos de un cuadrado se duplican y cada uno de los otros dos lados opuestos se disminuyen en 2 pies, el área del rectángulo resultante supera en 32 pies cuadrados el área del cuadrado original. Encuentre la longitud del lado del cuadrado.

R/ El cuadrado tiene lados de 8 pies de longitud.

4. Una lancha de motor mantiene una velocidad constante e 15 km/h al ir 10 kilómetros río arriba y de regreso al punto inicial. El tiempo total fue de 1.5 horas. Use esta información para encontrar la velocidad de la corriente.

R/ La velocidad de la corriente es de 5 km/h.

5. Ana demora 11 horas menos que el doble del tiempo que tarda Marta en realizar el mismo trabajo de bordado en un vestido de novia. Si trabajan juntas pueden terminar el trabajo en 28 horas, ¿cuánto tarda en hacer el trabajo cada una?

R/ Marta se tarda 44 horas y Ana se tarda 77 horas.

6. Una excursión al volcán de Pacaya costó en total Q. 3000.00. Si hubieran sido 3 miembros menos en el club, el costo por persona habría sido de Q50.00 más. ¿Cuántos miembros hay en el club?

R/ El club tiene 15 miembros.

7. Un hombre pintó un edificio por \$800.00. El trabajo le llevó 20 horas menos de lo que se suponía y entonces ganó \$2 más por hora de lo previsto. ¿En cuánto tiempo se suponía que pintaría el edificio?

R/ Originalmente se tardaría 100 horas en pintar el edificio.

8. Se desea construir una caja sin tapa con una pieza de cartón rectangular cuyo largo es 2cm mayor que el ancho. El alto de los lados de la caja es de 4cm. Si el volumen de la caja es de 672 centímetros cúbicos, encuentre las dimensiones de la pieza original de cartón.

R/ La pieza de cartón medía 20 por 22 centímetros.

9. Un comerciante compra cierto número de artículos por Q.180.00 y los vende a Q.20.00. Si la ganancia que obtuvo equivale al costo de 10 artículos, determine cuántos artículos compró y el costo de cada uno.

R/ Compró 15 artículos a Q.12.00 cada uno.

10. Un depósito se llena en 8 horas si se usa el grifo 1. Por medio de un segundo grifo el depósito se llena en 6 horas más que al usar ambos grifos juntos. Determine en cuánto tiempo se llena el depósito si se utiliza solo el segundo grifo.

R/ El depósito se llena en 10.55 horas si solo se abre el grifo 2.

.....

7. Desigualdades

Las relaciones de desigualdad son muy importantes de estudiar, identificando similitudes y diferencias con los procesos de resolución de ecuaciones.

Los símbolos básicos son $>$, $<$, que se leen mayor que y menor que, respectivamente. Las variantes son $\geq$ y $\leq$ que se leen mayor o igual que o menor o igual que.

Los intervalos abiertos se asocian con $<$ o $>$, mientras que los intervalos cerrados se representan con $\geq$ o $\leq$.

Las propiedades básicas de las desigualdades permiten sumar o restar un número real de ambos lados, sin afectar el sentido ($<$ o $>$). Si se multiplica o divide por un número real diferente de cero, el sentido se mantiene si el número es positivo y se invierte si es negativo. Esto es:

Las desigualdades permiten representar intervalos, como:

$$[a, b] : a \leq x \leq b$$

$$(a, b) : a < x < b$$

Además, otros de la forma

$$(-\infty, a) : x < a$$

$$(a, \infty) : x > a$$

$$(-\infty, a] : x \leq a$$

$$[a, \infty) : x \geq a$$

Para resolver desigualdades que incluyen expresiones con valor absoluto, se identifican dos formas, para un número real c .

a) Forma 1

$|x| < c$ que equivale a $-c < x < c$

$|x| \leq c$ que equivale a $-c \leq x \leq c$

b) Forma 2

$|x| > c$ corresponde $x < -c$ o $x > c$

$|x| \geq c$ corresponde $x \leq -c$ o $x \geq c$

.....

7.1 Ejercicios resueltos

1. Determine los valores que puede tomar x

$$3x + 5(10 - 2x) \leq 5(4 - x)$$

Solución:

Iniciaremos realizando las operaciones indicadas en la expresión original.

$$3x + 50 - 10x \leq 20 - 5x$$

Para resolver, agrupamos los términos que contienen x en el lado izquierdo, mientras que al lado derecho se transponen las constantes y se simplifica:

$$-7x + 5x \leq 20 - 50$$

$$-2x \leq -30$$

Al dividir ambos lados por -2, el sentido de la desigualdad se invierte.

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-30}{-2}$$

$$x \geq 15$$

Respuesta:

La variable x puede tomar valores en el intervalo $[15, \infty)$.

.....

2. Resolver la desigualdad dada y escribir la solución como un intervalo

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{3} - x < 4$$

Solución:

Al analizar la inecuación, observamos que la desigualdad es doble. Empezamos por restar $\frac{1}{3}$ en toda la expresión y simplificamos.

$$-\frac{3}{2} - \frac{1}{3} < -x < 4 - \frac{1}{3}$$

$$-\frac{11}{6} < -x < \frac{11}{3}$$

Al multiplicar por -1 , el sentido de las desigualdades de invierte.

$$\frac{11}{6} > x > -\frac{11}{3}$$

Reescribiendo del extremo inferior al superior del intervalo, tenemos:

$$-\frac{11}{3} < x < \frac{11}{6}$$

En forma de intervalo se tiene:

$$\left(-\frac{11}{3}, \frac{11}{6}\right)$$

Respuesta:

La variable x puede tomar valores en el intervalo $\left(-\frac{11}{3}, \frac{11}{6}\right)$.

.....

3. Resuelva la siguiente desigualdad

$$8x^2 - 6 > -8x$$

Solución:

Para resolver desigualdades con expresiones polinomiales las escribimos de forma canónica, es decir, en uno de los lados se escribe cero y en el otro el resto de los términos. En este caso tenemos que:

$$8x^2 - 6 + 8x > 0$$

$$8x^2 + 8x - 6 > 0$$

Podemos dividir toda la expresión por 2:

$$4x^2 + 4x - 3 > 0$$

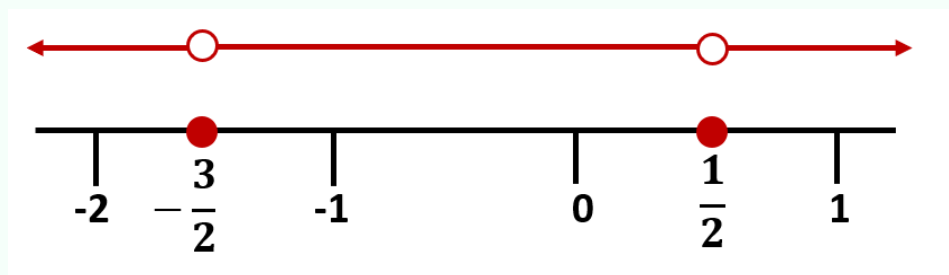
Factorizamos y obtenemos,

$$(2x - 1)(2x + 3) > 0$$

Para determinar los intervalos en los cuáles el producto anterior es positivo, mayor que cero, procedemos de la siguiente forma: determinamos los valores en los cuales cada binomio es igual a cero, los ubicamos en la recta real y determinamos los intervalos abiertos que se forman

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$



Analizamos el signo de cada factor en los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Se toma un valor en cada intervalo y se determina el signo de cada factor y el del producto. Organizamos la información en la siguiente tabla.

	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$		$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	
$2x - 1$	-2	-	0	-	1	+
$2x + 3$	-		+		+	
$(2x - 1)(2x + 3)$	+		-		+	

Respuesta:

La solución para $(2x - 1)(2x + 3) > 0$ está dada por: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

.....

4. Encuentre la solución para la siguiente desigualdad.

$$\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$$

Solución:

Para resolver esta desigualdad, lo más importante es no aplicar las propiedades de igualdades que permiten multiplicar por los denominadores, ya que se desconoce si su signo es positivo o negativo y en consecuencia, si el sentido de la desigualdad se mantiene o se invierte.

Procedemos a dejar en un lado cero y en el otro las expresiones algebraicas.

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x-1}{x-2} < 0$$

Realizamos las operaciones indicadas y simplificamos

$$\frac{(x+2)(x-2) - (x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 4 - x^2 - 2x + 3}{(x+3)(x-2)} < 0$$

$$\frac{-2x-1}{(x+3)(x-2)} < 0$$

Determinamos los valores críticos en los que cada factor es igual a cero.

$$-2x-1=0$$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

El siguiente factor:

$$x+3=0$$

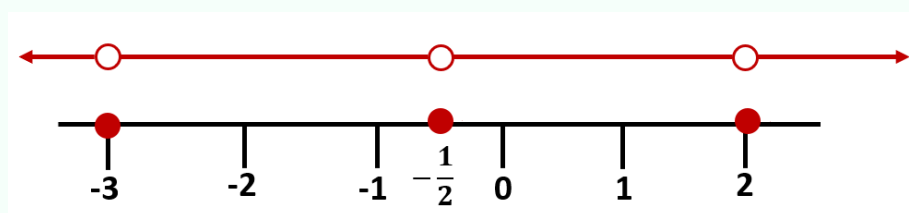
$$x=-3$$

Por último:

$$x-2=0$$

$$x=2$$

En la recta numérica se tiene lo siguiente.



Los intervalos para el análisis son entonces:

$$(-\infty, -3), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right), (2, \infty)$$

	$(-\infty, -3)$		$\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$		$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$		$(2, \infty)$	
$-2x-1$	-4	+	-1	+	0	-	3	-
$x+3$	-		+		+		+	
$x-1$	-		-		-		+	
Fracción	+		-		+		-	

La solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$

Respuesta:

Los intervalos que conforman la solución de la desigualdad son $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

.....

5. Encuentre la solución para la siguiente desigualdad.

$$2 + |1 - 5x| > 7$$

Solución:

Iniciamos despejando la expresión que contiene el valor absoluto.

$$|1 - 5x| > 5$$

Aplicamos las propiedades de valor absoluto para estas desigualdades. Primero tomaremos el valor positivo

$$1 - 5x > 5$$

$$-5x > 5 - 1$$

$$-5x > 4$$

$$x < -\frac{4}{5}$$

Ahora con el valor negativo.

$$1 - 5x < -5$$

$$-5x < -5 - 1$$

$$5x > 6$$

$$x > \frac{6}{5}$$

Respuesta:

La solución es $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}, \infty\right)$

.....

7.2 Ejercicios para autoevaluación

Determine los valores que puede tomar la variable.

1. $2(x - 5) \geq 5x + 8(20 - x)$ **R/** $[34, \infty)$

2. $-2 < 2 - 3x < \frac{5}{2}$ **R/** $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$

3. $x^2 - x < 2$ **R/** $(-1, 2)$

4. $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$ **R/** $(-2, -1)$

5. $3 + |2x + 1| < 6$ **R/** $(-2, 1)$



Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.