



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo II: Álgebra

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo II: Álgebra

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Noviembre de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Fundamentos de Álgebra	9
3	Expresiones algebraicas	11
3.1	Ejercicios resueltos	13
3.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	16
4	Polinomios y sus operaciones	19
4.1	Ejercicios resueltos	22
4.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	26
5	Productos notables	27
5.1	Ejercicios resueltos	30
5.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	36
6	Factorización de polinomios	37
6.1	Ejercicios resueltos	42
6.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	48
7	Expresiones algebraicas racionales	49
7.1	Ejercicios resueltos	52
7.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	62

8	Potenciación y radicación algebraica	65
8.1	Ejercicios resueltos	68
8.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	79
9	Problemas de Aplicación algebraicos	81
9.1	Ejercicios resueltos	85
9.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	93
	Bibliografía	95



1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

***Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo II: Álgebra***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala

2. Fundamentos de Álgebra

El álgebra, como rama de la matemática se fundamenta en los principios y propiedades estudiadas desde el punto de vista aritmético, en el conjunto de los números reales. Por lo que, los conocimientos aritméticos, las habilidades para la realización de operaciones y aplicación en la resolución de problemas, constituyen la base para el aprendizaje del álgebra.

Una de las diferencias que pueden notarse, es que mientras la aritmética consiste en trabajar con números (naturales, enteros, racionales o reales), en el campo del álgebra se combinan cantidades conocidas o constantes, con cantidades desconocidas o variables, que en este caso son números reales.

Otra de las diferencias importantes, es la representación generalizada que es posible realizar en el campo algebraico, por medio de letras, para referirse a cantidades involucradas en diversas situaciones. Algunos ejemplos son:

- Si x representa la edad de una persona en años, $x + 10$ representa su edad diez años después. En particular, si alguien tiene 18 años al ingresar a la universidad, dentro de 10 años tendrá $18 + 10 = 28$.
- Si x denota un número real, por medio de $x^2 - 5$ se expresa el cuadrado del número disminuido en cinco unidades. Por ejemplo, si $x = 10$, $10^2 - 5 = 100 - 5 = 95$, corresponde al resultado de elevar el número 10 al cuadrado y restarle cinco unidades.
- Si dos números a y b suman 60 y su división es 5, se puede escribir: $a + b = 60$, y $\frac{a}{b} = 5$. Además, se puede expresar $a = 60 - b$, o bien, $a = 5b$.
Se puede notar que hay infinitas formas de seleccionar dos números cuya suma sea 60, así como que su cociente sea 5; esta cantidad de números se reduce si debe satisfacer las dos condiciones a la vez. En este caso, es fácil determinar que los números son 50 y 10

- Si por medio de x , y , z se representan las medidas de los lados de cualquier triángulo, entonces el perímetro P , se puede expresar como: $P = x + y + z$. Si los lados miden 3, 4 y 5, el perímetro $P = 3 + 4 + 5 = 12$.

En estudios avanzados del álgebra se centra la atención en la estructura que tienen los conjuntos en los cuales se estudian las operaciones y sus propiedades, entre los que se puede mencionar: las matrices, los vectores, las funciones y los conectivos lógicos.



3. Expresiones algebraicas

Así como en el campo de la aritmética el concepto básico es del número, en el campo del álgebra de los números reales el concepto básico es el de término algebraico, el que procedemos a estudiar.

Término algebraico

Se denomina así a la unidad algebraica irreducible, es decir, que no está separada por signos de suma o resta (+ o -). Por ejemplo: $3x^3y^{1/2}z^3$, $-\sqrt{2}m^2n^{-2}$, $\frac{4}{3}\pi r^3$, $2a^2b^{3/4}$, $-w$

Es importante notar algunos aspectos que tienen en común los ejemplos dados:

- Las expresiones contienen números conocidos, que se llaman **coeficientes**, los cuales pueden ser **positivos o negativos**. Estos coeficientes son números reales que en forma particular pueden ser enteros, racionales o irracionales.
- Los términos contienen una parte formada por letras que incluyen exponentes, que se llama **parte literal**. Esta parte literal representa números que son desconocidos o que pueden tomar diferentes valores, por lo que pueden usarse distintas letras y exponentes.
- En todos los ejemplos se expresan productos pero no se escribe de forma explícita el símbolo $\times$, se entiende que si no hay signo entre dos letras, se están multiplicando; algunos libros usan los paréntesis para indicar una multiplicación, o bien usan un punto, por lo que: $a \times b = ab = (a)(b) = a.b$, e incluso en algunos contextos se usa $a * b$. Lo mismo ocurre si se escribe $3z$, significa 3 multiplicado por el valor de z .

Partes de un término algebraico

En un término algebraico pueden identificarse las siguientes partes: coeficiente y parte literal. El coeficiente es un número real, por lo que su signo puede ser positivo o negativo. La parte literal incluye el producto de números desconocidos o variables, representados por letras y sus exponentes.

En los ejemplos dados, tenemos lo siguiente:

- a) $3x^3y^{1/2}z^3$: coeficiente es 3 y la parte literal es $x^3y^{1/2}z^3$
- b) $-\sqrt{2}m^2n^{-2}$: coeficiente está dado por $-\sqrt{2}$ mientras que la parte literal es m^2n^{-2}
- c) $\frac{4}{3}\pi r^3$: el coeficiente es $\frac{4}{3}\pi$ y la parte literal es r^3 .
- d) $2a^2b^{3/4}$: el coeficiente es 2 y la parte literal está formada por $a^2b^{3/4}$
- e) $-w$: el coeficiente es -1 y la parte literal la representa w .

Términos semejantes y simplificación

Los términos algebraicos semejantes, se definen como aquellos en los que la parte literal es la misma, es decir, los que incluyen las mismas letras afectadas por los mismos exponentes.

Ejemplos:

$-3a^2b^3c^4$ es semejante a los términos dados por $\frac{4}{7}a^2b^3c^4$ y $5a^2b^3c^4$, pues tienen la misma parte literal, es decir, las mismas letras elevadas a los mismos exponentes.

$-3a^2b^3c^4$ no es semejante a $3a^3b^2c^4$, ya que, aunque las letras son las mismas los exponentes son distintos para **a** y para **b**.

La idea básica de los términos semejantes, es que son expresiones algebraicas que comparten características comunes, la parte literal, lo que permite agruparlos y operarlos en función de sus coeficientes, de acuerdo con las definiciones y propiedades de la adición y sustracción en los números reales. A este proceso se le denomina simplificación de términos semejantes, ya que se agrupan los términos semejantes para obtener una expresión más condensada.

Como se indicó al inicio de esta sección, los términos algebraicos son unidades básicas que al combinarse mediante operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) forman lo que se conoce como **expresiones algebraicas**. En dichas expresiones se pueden incluir términos semejantes a los cuales será necesario aplicar un proceso de simplificación para la obtención de expresiones más sencillas.

En la simplificación de términos semejantes tiene vigencia la jerarquía de las operaciones que se estudió, en la cual se incluyen signos de agrupación.

Como ejemplo preliminar se simplifican los términos semejantes en la expresión dada.

$$-3ab + 8ab^2 + \frac{1}{2}ab - 13ab + 5ab^2 - 8a$$

La estrategia inicial es observar con detenimiento la expresión completa y a partir de ello se determina que hay varios tipos de términos algebraicos, por lo que se pueden reordenar asociando los que tengan la misma parte literal, ab , ab^2 y solo a :

$$(-3ab + \frac{1}{2}ab - 13ab) + (8ab^2 + 5ab^2) - 8a$$

Luego, se operan los coeficientes y el resultado será el coeficiente simplificado para los términos semejantes en cada caso identificado.

$$\text{En primer caso, se determina que } -3 + \frac{1}{2} - 13 = \frac{-6 + 1 - 26}{2} = \frac{-31}{2} = -\frac{31}{2}$$

En segundo caso se determina que $8 + 5 = 13$.

Para el tercer término no existe ninguno semejante.

La expresión inicial de seis términos se simplificó a una de tres:

$$\begin{aligned} (-3ab + \frac{1}{2}ab - 13ab) + (8ab^2 + 5ab^2) - 8a &= (-3 + \frac{1}{2} - 13)ab + (8 + 5)ab^2 - 8a \\ &= -\frac{31}{2}ab + 13ab^2 - 8a \end{aligned}$$

.....

3.1 Ejercicios resueltos

1. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión

$$m^2 + 7mn - 10m^2 - 8mn + m^3 - m^2 + 25m^2 + 8m^3$$

Solución:

Se identifican términos semejantes para: m^2 , m^3 y mn . Se reagrupan de acuerdo a esto.

$$\begin{aligned} m^2 + 7mn - 10m^2 - 8mn + m^3 - m^2 + 25m^2 + 8m^3 \\ = (m^2 - 10m^2 - m^2 + 25m^2) + (m^3 + 8m^3) + (7mn - 8mn) \end{aligned}$$

Al tener los términos semejantes agrupados, procedemos a reducir para cada uno.

$$= 15m^2 + 9m^3 - mn$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es: $15m^2 + 9m^3 - mn$

.....

2. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión

$$5a^{x+1} + 2b^{x+2} - c^{x+3} - 8a^{x+1} - 30 - 6b^{x+2} - 4 + b^{x+2} + 7c^{x+3} + 40$$

Solución:

Se agrupan los términos que tienen la misma parte literal

$$\begin{aligned} 5a^{x+1} + 2b^{x+2} - c^{x+3} - 8a^{x+1} - 30 - 6b^{x+2} - 4 + b^{x+2} + 7c^{x+3} + 40 \\ = (5a^{x+1} - 8a^{x+1}) + (2b^{x+2} - 6b^{x+2} + b^{x+2}) + (-c^{x+3} + 7c^{x+3}) + (-30 - 4 + 40) \end{aligned}$$

Ahora reducimos para cada término.

$$= -3a^{x+1} - 3b^{x+2} + 6c^{x+3} + 6$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es $-3a^{x+1} - 3b^{x+2} + 6c^{x+3} + 6$

.....

3. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{5}{3}y^2 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{4}{9}y^2$$

Solución:

Para reducir la expresión agrupamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{2}xy - \frac{5}{3}y^2 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{4}{9}y^2 \\ &= \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{4}x^2\right) + \left(\frac{3}{2}xy + \frac{5}{3}xy\right) + \left(-\frac{5}{3}y^2 + \frac{4}{9}y^2\right) \end{aligned}$$

Reducimos para cada término

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{3}{5} + \frac{7}{4}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right)xy + \left(-\frac{5}{3} + \frac{4}{9}\right)y^2 \\ &= \left(\frac{-12+35}{20}\right)x^2 + \left(\frac{9+10}{6}\right)xy + \left(\frac{-15+4}{9}\right)y^2 \\ &= \frac{23}{20}x^2 + \frac{19}{6}xy + \left(\frac{-11}{9}\right)y^2 \end{aligned}$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es $\frac{23}{20}x^2 + \frac{19}{6}xy - \frac{11}{9}y^2$

.....

4. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión.

$$= \frac{23}{20}x^2 + \frac{19}{6}xy + \left(\frac{-11}{9}\right)y^2$$

Solución:

Se procede a operar desde los signos internos hasta los externos

$$-(x^2 - y^2) - \{-3xy - [-y^2 + (-x^2 - 3xy + 2y^2)]\}$$

$$= -(x^2 - y^2) - \{-3xy - [-y^2 - x^2 - 3xy + 2y^2]\}$$

Reducimos dentro de las llaves

$$\begin{aligned} &= -(x^2 - y^2) - \{-\cancel{3xy} + y^2 + x^2 + \cancel{3xy} - 2y^2\} \\ &= -(x^2 - y^2) - \{x^2 - y^2\} \end{aligned}$$

Reducimos los términos restantes

$$\begin{aligned} &= -x^2 + y^2 - x^2 + y^2 \\ &= -2x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es $-2x^2 + 2y^2$

.....

5. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión

$$-[a + \{-(a + b) - [-a + (b - c) - (a + b - 3c)] - c\}]$$

Solución:

Se procede a operar desde los signos internos hasta los externos

$$\begin{aligned} &= -[a + \{-(a + b) - [-a + (b - c) - (a + b - 3c)] - c\}] \\ &= -[a + \{-(a + b) - [-a + \cancel{b} - c - a - \cancel{b} + 3c] - c\}] \end{aligned}$$

Reducimos dentro del corchete

$$\begin{aligned} &= -[a + \{-(a + b) - [-2a + 2c] - c\}] \\ &= -[a + \{-(a + b) + 2a - 2c - c\}] \end{aligned}$$

Ahora reducimos dentro de las llaves

$$\begin{aligned} &= -[a + \{-a - b + 2a - 2c - c\}] \\ &= -[a + \{a - b - 3c\}] \end{aligned}$$

Procedemos a reducir dentro de los corchetes

$$\begin{aligned} &= -[a + a - b - 3c] \\ &= -[2a - b - 3c] \end{aligned}$$

Finalmente aplicamos el cambio de signo

$$= -2a + b + 3c$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es igual a $-2a + b + 3c$

.....

6. Reduzca los términos semejantes en la siguiente expresión

$$-4 + 4 \{y - [-x + 5(y - 3) - 2(-1 - x)] + 3\}$$

Solución:

Se procede a operar desde el interior hasta el exterior, empezaremos por los paréntesis:

$$-4 + 4 \{y - [-x + 5(y - 3) - 2(-1 - x)] + 3\}$$

$$= -4 + 4 \{y - [-x + 5y - 15 + 2 + 2x] + 3\}$$

Reducimos dentro de los corchetes

$$= -4 + 4 \{y - [x + 5y - 13] + 3\}$$

Ahora reducimos dentro de las llaves

$$= -4 + 4 \{y - x - 5y + 13 + 3\}$$

$$= -4 + 4 \{-x - 4y + 16\}$$

Ahora multiplicamos por 4

$$= -4 - 4x - 16y + 64$$

Finalmente reducimos los términos semejantes

$$= -4x - 16y + 60$$

Respuesta:

La reducción de términos semejantes es igual a $-4x - 16y + 60$

.....

3.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Reduzca los términos semejantes:

$$2x^4y - x^3y^2 + x^2y - 8x^4y - 2x^2y - 10 + xy - 8 - 5x^4y - y^3 + 4$$

$$\mathbf{R/} -11x^4y - x^2y - y^3 - 6$$

2. Reduzca los términos semejantes:

$$3a^{m+2} - 5x^{m-3} - 5 + 10 + 5a^{m+2} - 8 - 3x^{m-3} + 6a^{m+2} - a^{m+3}$$

$$\mathbf{R/} 14a^{m+2} - 8x^{m-3} - a^{m+3} - 3$$

3. Reduzca los términos semejantes:

$$\frac{3}{25}m^3 - \frac{7}{50}n^2 + \frac{3}{5}m^3 - \frac{2}{25}n^2 + \frac{3}{100}m^3 + \frac{8}{5}n^2$$

$$\mathbf{R/} \frac{3}{4}m^3 + \frac{69}{50}n^2$$

4. Reduzca los términos semejantes:

$$-(-t + u) - [-(-t + u) - (-2t + 5u) + (-t + u - t)]$$

$$\mathbf{R/} 2t + 4u$$

5. Reduzca los términos semejantes:

$$-[3m + \{-m - (n - (m + 4))\} + \{-(m + n) + (2n + 3)\}]$$

$$\mathbf{R/} -2m - 7$$

6. Reduzca los términos semejantes:

$$8 - 3\{a - 2[a - (b - 2) + 3(b - 3)] - 6(a - b)\}$$

$$\mathbf{R/} 15a - 6b + 20$$

4. Polinomios y sus operaciones

Entre las expresiones algebraicas, estudiaremos un grupo muy especial que se diferencia por características tales como: los exponentes de todos los términos son **enteros mayores o iguales que 1**. Dichas expresiones reciben el nombre de **polinomios**.

En este punto, es conveniente analizar que el concepto de polinomio se refiere en algunos libros de texto, como una expresión con muchos términos, pero en este documento el concepto de polinomio que se estudia servirá para aprendizajes posteriores de temas relacionados con las funciones y ecuaciones polinomiales.

De forma particular, si un polinomio se expresa para una sola variable, **x**, éste debe tener la forma siguiente:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

donde:

- Los coeficientes $a_n, \dots, a_0$, son números reales, con $a_n \neq 0$.
- Como caso particular, debe considerarse que si $n = 0$, el polinomio se convierte en una constante (número real) por lo que se establece que si n es un número entero mayor o igual que 1, indica el grado del polinomio.

Como ejemplos, se presentan expresiones para determinar si son polinomios o no lo son:

- a) $3x^3 - 5x^2 + 2x - \frac{1}{2}$. La expresión es un polinomio pues los exponentes son enteros mayores o iguales a uno, es decir, no incluye exponentes negativos o fraccionarios. El grado es 3 y los coeficientes son: $a_3 = 3$, $a_2 = -5$, $a_1 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{2}$.
- b) $-x^4 + 5x^2 - 3$. Los exponentes cumplen con la condición de ser enteros mayores o iguales que uno, por lo que se trata de un polinomio de grado 4. Los coeficientes son: $a_4 = -1$,

$$a_3 = 0, a_2 = 5, a_1 = 0, a_0 = -3.$$

- c) x^2 . En la expresión dada, el exponente que aparece es mayor o igual que uno, por lo que es un polinomio de grado 2, en el cual los coeficientes son: $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, y $a_0 = 0$.
- d) $2x^3 - 5x^{-2} + 2x + 1$. En la expresión se observa que uno de los exponentes es negativo, por lo cual no es un polinomio.
- e) $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 3x^{1/2} + 8x + 4$. No es un polinomio, pues uno de los exponentes es fraccionario, por lo que no satisface la condición de ser un número entero mayor o igual que 1.

Los polinomios pueden incluir varias variables, como por ejemplo $a^2 + 2ab + b^2$, es común que si un polinomio consta de un término se le llame monomio, si consta de dos términos se le denomine como binomio y a los de tres términos se les designe como trinomios.

Para sumar y restar polinomios, se aplican los principios aritméticos de operación igual que para la reducción de los términos semejantes; la multiplicación y la división se basan en las leyes de potenciación y las reglas prácticas estudiadas para los casos en que los signos de los coeficientes sean positivos o negativos; el procedimiento de la división se generaliza para el caso de expresiones algebraicas.

Las operaciones combinadas de polinomios se realizan tomando en cuenta la jerarquía de las operaciones y la presencia de signos de agrupación. A continuación, se presentan ejemplos preparatorios para la fase de desarrollo de habilidades en la realización de secuencias operativas.

Dados los polinomios identificados como: $\mathbf{P} = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. $\mathbf{Q} = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7$. $\mathbf{R} = x^3 - 6x - 2$. Efectuar:

$$a) P + R - Q$$

$$b) Q + (R - P)$$

$$c) PR$$

- a) La suma y resta son operaciones que tienen la misma jerarquía, en ausencia de signos de agrupación se realizan esas operaciones en el orden en que se presentan. Para ello es conveniente ordenar los polinomios en forma descendente y agrupar los términos semejantes.

$$\begin{aligned} P + R &= x^3 + 2x^2 - 3x + 1 + x^3 - 6x - 2 \\ &= (x^3 + x^3) + (2x^2) + (-3x - 6x) + (1 - 2) \\ P + R &= 2x^3 + 2x^2 - 9x - 1 \end{aligned}$$

Ahora se efectúa, $P + R - Q$

$$\begin{aligned} P + R - Q &= (2x^3 + 2x^2 - 9x - 1) - (2x^3 - 2x^2 + 4x - 7) \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 9x - 1 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ &= (2x^3 - 2x^3) + (2x^2 + 2x^2) + (-9x - 4x) + (-1 + 7) \\ P + R - Q &= 4x^2 - 13x + 6 \end{aligned}$$

Cuando se ha desarrollado habilidad para realizar operaciones con polinomios, pueden indicarse y realizarse de forma conjunta y suprimir los pasos que se considere innecesarios.

$$P + R - Q = 4x^2 - 13x + 6$$

- $R - P = R + (-P)$. Esto significa que a P se suma el simétrico de P, por eso cambian los signos.

$$R - P = -2x^2 - 3x - 3$$

$$\begin{aligned} Q + (R - P) &= (2x^3 - 2x^2 + 4x - 7) + (-2x^2 - 3x - 3) \\ &= 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7 - 2x^2 - 3x - 3 \\ &= 2x^3 + (-2x^2 - 2x^2) + (4x - 3x) + (-7 - 3) \\ Q + (R - P) &= 2x^3 - 4x^2 + x - 10 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} PR &= (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)(x^3 - 6x - 2) \\ &= x^6 + 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 6x - 2x^3 - 4x^2 + 6x - 2 \\ PR &= x^6 + 2x^5 - 9x^4 - 13x^3 + 14x^2 - 2 \end{aligned}$$

- Ordenar en forma descendente ambos polinomios, dejando espacios si falta alguna potencia.
 - Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, el resultado es el primer término del cociente.
 - Se multiplica el divisor por el término del cociente y el producto se resta del dividendo. Se procede así hasta que la división sea posible.
- Ej. $3x^3 - 5x^2y - 8xy^2 - 2y^3 \div 3x + y$

[illegible]

4.1 Ejercicios resueltos

1. De la suma de $8a - 7b - 4$ con $7a - 4b + 5$ restar la suma de $4a - 5b - 9$ con $9b - 7a - 15$

Solución:

El ejercicio indica que se deben sumar las dos primeras expresiones, también se deben sumar la tercera con la cuarta y luego restar la segunda suma de la primera.

Empezamos por sumar las dos primeras expresiones:

$$\begin{aligned}(8a - 7b - 4) + (7a - 4b + 5) &= 8a - 7b - 4 + 7a - 4b + 5 \\ &= (8 + 7)a + (-7 - 4)b + (-4 + 5) \\ &= 15a - 11b + 1\end{aligned}$$

Ahora realizamos la suma de la tercera y la cuarta expresión:

$$\begin{aligned}(4a - 5b - 9) + (9b - 7a - 15) &= 4a - 5b - 9 + 9b - 7a - 15 \\ &= (4 - 7)a + (-5 + 9)b + (-9 - 15) \\ &= -3a + 4b - 24\end{aligned}$$

Finalmente restamos la segunda suma de la primera:

$$\begin{aligned}(15a - 11b + 1) - (-3a + 4b - 24) &= 15a - 11b + 1 + 3a - 4b + 24 \\ &= (15 + 3)a + (-11 - 4)b + (1 + 24) \\ &= 18a - 15b + 25\end{aligned}$$

Respuesta:

El resultado de la operación dada es $18a - 15b + 25$

.....

2. Encontrar la expresión que debe restarse de $4x + 2y - 7$ para que la diferencia sea igual a $3x - y + 5$

Solución:

Es conveniente recordar que al restar dos cantidades $A - B = C$, la parte que se resta (sustraendo) equivale a: $B = A - C$. Un ejemplo sencillo es: $8 - 5 = 3$, entonces $8 - 3 = 5$

$$\begin{aligned}A - C &= B \\ (4x + 2y - 7) - (3x - y + 5) &= B \\ 4x + 2y - 7 - 3x + y - 5 &= B \\ (4 - 3)x + (2 + 1)y + (-7 - 5) &= B \\ x + 3y - 12 &= B\end{aligned}$$

Para verificar, se puede efectuar $A - B$

$$\begin{aligned} A - B &= C \\ (4x + 2y - 7) - (x + 3y - 12) &= C \\ 4x + 2y - 7 - x - 3y + 12 &= C \\ (4 - 1)x + (2 - 3)y + (12 - 5) &= C \\ 3x - y + 7 &= C \end{aligned}$$

Esta expresión coincide con la diferencia dada en el enunciado.

Respuesta:

La expresión que debe restarse es $x + 3y - 12$

.....

3. Si $9m^3 - 8m^2n + 5mn^2 - n^3$ se resta de n^3 , determinar la expresión que debe sumarse a la diferencia para obtener m^3

Solución:

Se inicia por realizar la diferencia indicada para analizar el resultado:

$$\begin{aligned} n^3 - (9m^3 - 8m^2n + 5mn^2 - n^3) &= n^3 - 9m^3 + 8m^2n - 5mn^2 + n^3 \\ &= 2n^3 - 9m^3 + 8m^2n - 5mn^2 \end{aligned}$$

Si se analiza la expresión que resulta de la resta es posible identificar que solo debe permanecer m^3 .

La pregunta es: ¿qué expresión se debe sumar a $-9m^3$ para que el resultado sea m^3

Se conoce uno de los sumandos: $-9m^3$ y el resultado de la suma m^3 , el otro sumando será entonces: Total – sumando conocido.

$$m^3 - (-9m^3) = 10m^3$$

Los términos restantes no aparecen, es decir, al sumarlos con términos semejantes de signo opuesto el resultado es cero.

Así:

$$\begin{aligned} 2n^3 + (-2n^3) &= 2n^3 - 2n^3 = 0 \\ 8m^2n + (-8m^2n) &= 8m^2n - 8m^2n = 0 \\ -5mn^2 + 5mn^2 &= 0 \end{aligned}$$

Respuesta:

La expresión que debe sumarse es: $10m^3 - 2n^3 - 8m^2n + 5mn^2$

4. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

$$(a - b + c - d)^2$$

Solución:

Podemos reescribir la expresión de la siguiente manera:

$$(a - b + c - d)^2 = (a - b + c - d)(a - b + c - d)$$

Desarrollaremos la multiplicación planteada donde multiplicaremos cada término del primer polinomio por cada término del segundo, luego simplificamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned} &= a^2 - ab + ac - ad - ab + b^2 - bc + bd + ac - bc + c^2 - cd - ad + bd - cd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la operación es igual a: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$

.....

5. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

Solución:

Para poder realizar la operación indicada realizaremos primero la multiplicación de dos paréntesis y luego multiplicaremos por el tercero.

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) &= (x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^4 + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{x} + x^2 + \cancel{x} + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos el resultado obtenido por el tercer polinomio

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) &= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= x^8 + x^6 + x^4 - x^6 - x^4 - x^2 + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^8 + \cancel{x^6} + \cancel{x^4} - \cancel{x^6} - \cancel{x^4} - \cancel{x^2} + x^4 + \cancel{x^2} + 1 \\ &= x^8 + x^4 + 1 \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la operación es igual a $x^8 + x^4 + 1$

6. Dividir el polinomio $a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$ entre $a^2 + ab + b^2$

Solución:

El polinomio dividendo está ordenado pero se observa que falta un término para a^2 , por lo que se reserva un espacio, el polinomio divisor está ordenado

Para realizar la división se tienen los siguientes pasos:

- Se divide a^4 entre a^2 y el resultado es parte del cociente.
 $a^4 \div a^2 = a^2$
- Se multiplica a^2 por todo el polinomio divisor y los resultados se restan del dividendo

$$\begin{aligned} a^2(a^2) &= a^4 \\ a^2(ab) &= a^3b \\ a^2(b^2) &= a^2b^2 \end{aligned}$$

Todos cambian de signo al restar

- Se reducen los términos semejantes y se reinicia el proceso.
- $-\frac{2a^3b}{a^2} = -2ab$, segundo término del cociente
- Se multiplica $-2ab$ por el divisor y se resta del dividendo
- Se divide $\frac{a^2b^2}{a^2} = b^2$, este es el tercer término del cociente
- Se multiplica por el divisor y se resta del dividendo
- Al reducir términos semejantes el residuo es cero

A continuación podemos ver el desarrollo de la división.

[illegible]

Respuesta:

El resultado de la división es: $a^2 - 2ab + b^2$

4.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. A la diferencia entre los polinomios $2x + y - z$ y $3x - y + 2z$, sumarle la diferencia entre $x - 2y + 6z$ y $5x + 6y + 4z$
R/ $-5x - y - z$
2. Encontrar la expresión a la que se resta $2m - 2n + 3p$ para obtener una diferencia igual a $4m + n - 2p$
R/ $6m - n + p$
3. Si $a^3 + 5a + 18$ es el sustraendo de una diferencia y el resto es $-a^3 + 5a - 8$ determine de qué expresión se ha restado la primera.
R/ $10a + 10$
4. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar $(2w - x + 2y - z)^2$
R/ $x^2 + 4y^2 + 4w^2 + z^2 - 4wx + 8wy - 4wz - 4xy + 2xz - 4yz$
5. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$
R/ $x^{10} - x^9 + x^8 + x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1$
6. Dividir $m^6 - m^5 + 5m^3 - 6m + 9$ entre $m^4 + 3 - m^2 + m^3$
R/ $m^2 - 2m + 3$



5. Productos notables

Al multiplicar expresiones algebraicas, hay algunas cuya estructura permite obtener el resultado sin realizar todo el procedimiento operativo, a estas multiplicaciones se les conoce como **productos notables**. El desarrollo de habilidades para reconocer y realizar este tipo de productos, constituye una herramienta valiosa para el estudio de otros temas, como la factorización, resolución de ecuaciones y la operación de fracciones algebraicas.

Entre los productos notables más aplicados se encuentran los siguientes:

Cuadrado de un binomio

Con esta expresión se hace referencia a dos cantidades, cuya suma o diferencia, se eleva al cuadrado. En la mayoría de situaciones aritméticas es posible que no sea tan visible la importancia de realizar de forma abreviada este producto, tal es el caso de operaciones como $(8 + 2)^2$ que se puede escribir como $(8 + 2)(8 + 2)$, pero que el resultado inmediato es 100.

Es en el contexto algebraico que se aprecia su verdadero potencial. Así, en términos generales se cumple que:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Como puede observarse, en ambos casos se genera un trinomio que incluye los cuadrados de los términos que conforman el binomio, y también se incluye el doble producto de las expresiones que se acompaña de un signo positivo o negativo, dependiendo si se trata de una suma o una resta la que se eleva al cuadrado. Esto es muy importante de tomar en cuenta ya que un error operativo frecuente consiste en la omisión de ese doble producto.

Ejemplo:

$$a) (2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$b) \left(\frac{3}{2}a^3 - \frac{3}{4}b^4\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a^3\right)^2 - 2\left(\left(\frac{3}{2}a^3\right)\left(\frac{3}{4}b^4\right)\right) + \left(\frac{3}{4}b^4\right)^2 = \frac{9}{4}a^6 - \frac{9}{4}a^3b^4 + \frac{9}{16}b^8$$

Producto de un binomio por su conjugado

Se dice que dos binomios son conjugados si difieren en el signo de uno de los términos que los componen, por ejemplo, los binomios $a + b$ y $a - b$, son conjugados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Como puede observarse, el producto de la suma por la diferencia de dos expresiones, es equivalente a la diferencia de los cuadrados de dichas expresiones. Dado que la adición es conmutativa pero la sustracción no lo es, la primera de las expresiones que aparece elevada al cuadrado es el primer término de la diferencia.

Ejemplo:

- a) En el producto $(2m^4 + 3n^2)(3n^2 - 2m^4)$ se observa que el orden en que aparecen los términos en el primer binomio es diferente del orden en el que aparecen en el segundo, pero el primero puede reordenarse por la conmutatividad de la suma y obtener el producto:

$$(3n^2 + 2m^4)(3n^2 - 2m^4) = (3n^2)^2 - (2m^4)^2 = 9n^4 - 4m^8$$

$$b) (\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha)(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha) = (\sqrt{3}\sin\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2 = 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

Producto de binomios de las formas $(x + a)(x + b)$ y $(cx + a)(dx + b)$

El primer tipo de estos binomios se caracteriza porque el primer término de ambos es el mismo y difieren en el término constante, su producto se obtiene así:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

El producto obtenido es un trinomio que contiene al cuadrado del primer término de los binomios, el producto de los segundos términos, así como el primer término acompañado de un coeficiente dado por la suma de los segundos términos.

Ejemplo:

$$a) (x + 5)(x - 8) = x^2 + (5 + (-8))x + 5(-8) = x^2 + (5 - 8)x - 40 = x^2 - 3x - 40.$$

- b) Para efectuar el producto $(m^2 - 7)(m^2 + 10)$, debe identificarse que aunque el primer término sea de segundo grado, puede adecuarse a la estructura del producto en estudio, lo cual se ejemplifica a continuación:

$$(m^2 - 7)(m^2 + 10) = (m^2)^2 + (-7 + 10)m^2 + (-7)(10) = m^4 + 3m^2 - 70$$

En el caso de que los coeficientes del primer término de los binomios son diferentes de 1, el producto se obtiene de la siguiente forma:

$$(cx + a)(dx + b) = cdx^2 + adx + bcx + ab = cdx^2 + (ad + bc)x + ab$$

Ejemplo:

$$a) (7x - 8)(4x - 3) = (7x)(4x) + (-8)(4x) + (7x)(-3) + (-8)(-3) = 28x^2 - 53x + 24$$

$$b) (4m^2 + 5)(4m^2 - 9) = (4m^2)^2 + (5)(4m^2) + (-9)(4m^2) + 5(-9) = 16m^4 - 16m^2 - 45$$

Cubo de un binomio

Es importante contar con técnicas para operar en forma resumida productos como los siguientes:

$$(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3 \text{ o bien } (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^3$$

Se realizaran los productos de la forma establecida para el producto de polinomios, se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Se puede observar que el resultado consta de 4 términos en ambos casos, en el caso de la adición, todos los términos son positivos, mientras que para el caso de la diferencia, los signos se alternan entre positivo y negativo. Otras características relevantes:

1. Al ordenarse, el primero y el último término corresponden a los cubos de los términos que forman el binomio.
2. El segundo término se construye así: triple del producto del cuadrado del primer término por el segundo.
3. El tercer término del resultado se construye de manera similar: triple producto del primer término del binomio por el segundo elevado al cuadrado.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}a) \text{ Encontrar el resultado de } (2x + 5y)^3 \\ (2x + 5y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 + (5y)^3 \\ (2x + 5y)^3 &= 8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \text{ Encontrar el resultado de } (3m - 6m^2n)^3 \\ (3m - 6m^2n)^3 &= (3m)^3 - 3(3m)^2(6m^2n) + 3(3m)(6m^2n)^2 - (6m^2n)^3 \\ (3m - 6m^2n)^3 &= 27m^3 - 162m^4n + 324m^5n^2 - 216m^6n^3\end{aligned}$$

En el caso en que se requiera elevar un binomio a una potencia mayor, por ejemplo $(a + b)^4$ o $(a - b)^6$, se pueden aplicar las reglas prácticas anteriores: $(a + b)^4 = (a + b)^2(a + b)^2$ y también se puede desarrollar $(a - b)^6 = (a - b)^3(a - b)^3$. Sin embargo, en el caso de potencias mayores, esos procesos se complican. Por lo cual, es de utilidad contar con otros conocimientos para realizar estas operaciones de forma ágil, para lo cual se resaltan los siguientes aspectos:

- a) Cuando se desarrolla un producto notable de forma $(a + b)^n$, el resultado consta de $n + 1$ términos.
- b) El primer término es a^n y el último es b^n
- c) El exponente del término a desciende de uno en uno, mientras el exponente de b se incrementa también de uno en uno.
- d) Los coeficientes de los términos intermedios pueden obtenerse del Triángulo de Pascal.

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
	1	4		6		4		1
	1	5	10		10	5		1
	1	6	15	20		15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Este triángulo es una disposición de números que se forma al colocar 1 en la primera posición y en los extremos de todas las filas. Los números restantes de una fila se determinan sumando los dos que se encuentran a derecha e izquierda en la fila superior. Por ejemplo, el 2 de la tercera fila es la suma de los unos que están en los extremos en la fila 2.

Los números de cada fila $n + 1$ corresponden a los coeficientes del binomio de exponente n : En la fila 3, los números son 1, 2, 1, son los coeficientes de desarrollar $(a + b)^2$.

Si se requieren los coeficientes de $(a + b)^5$, se buscan en la sexta fila y se identifica que son: 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Siguiendo las reglas anteriores se obtiene:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

.....

5.1 Ejercicios resueltos

1. Aplique los productos notables y desarrolle la siguiente expresión

$$(a + 2b + 3c)^2$$

Solución:

Como sabemos, el propósito de los productos notables es desarrollar un producto indicado. Para la expresión dada agruparemos los términos y lo analizaremos como un binomio.

$$\begin{aligned}
 (a + 2b + 3c)^2 &= [(a + 2b) + 3c]^2 \\
 &= (a + 2b)^2 + 2(a + 2b)(3c) + (3c)^2 \\
 &= a^2 + 2(a)(2b) + 4b^2 + 6c(a + 2b) + 9c^2 \\
 &= a^2 + 4ab + 4b^2 + 6ac + 12bc + 9c^2
 \end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es igual a $a^2 + 4ab + 4b^2 + 6ac + 12bc + 9c^2$

2. Aplique los productos notables y desarrolle la siguiente expresión

$$(2x - 3y - 4w - 5z)^2$$

Solución:

Dado que nuestra expresión es compleja, agruparemos los términos en dos binomios para poder desarrollar la misma.

$$\begin{aligned}(2x - 3y - 4w - 5z)^2 &= [(2x - 3y) - (4w + 5z)]^2 \\&= (2x - 3y)^2 - 2(2x - 3y)(4w + 5z) + (4w + 5z)^2 \\&= 4x^2 - 2(2x)(3y) + 9y^2 - 2(8xw - 12yw + 10xz - 15yz) + 16w^2 + 2(4w)(5z) + 25z^2 \\&= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 16xw + 24yw - 20xz + 30yz + 16w^2 + 40wz + 25z^2 \\&= 4x^2 + 9y^2 + 16w^2 + 25z^2 - 12xy - 16xw + 24yw - 20xz + 30yz + 40wz\end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es igual a $4x^2 + 9y^2 + 16w^2 + 25z^2 - 12xy - 16xw + 24yw - 20xz + 30yz + 40wz$

.....

3. Aplique los productos notables y desarrolle la siguiente expresión

$$(2x - 1)^3 - (2x + 3)(x + 1)$$

Solución:

Se procede a desarrollar la expresión aplicando dos tipos de productos notables, desarrollamos primero la diferencia elevada al cubo:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1^3) - 1^3 \\&= 8x^3 - 3(4x^2)(1) + 3(2x)(1) - 1 \\&= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1\end{aligned}$$

Ahora desarrollamos el producto de binomios:

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x + 1) &= 2x^2 + (3 \times 1 + 2 \times 1)x + 3 \\&= 2x^2 + (3 + 2)x + 3 \\&= 2x^2 + 5x + 3\end{aligned}$$

Finalmente, se sustituyen los resultados parciales en la expresión original y se simplifican:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^3 - (2x + 3)(x + 1) &= (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) - (2x^2 + 5x + 3) \\&= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 2x^2 - 5x - 3 \\&= 8x^3 - 14x^2 + x - 4\end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es: $8x^3 - 14x^2 + x - 4$

.....

4. Aplique productos notables y desarrolle la siguiente expresión

$$(x^4 - 4)(x^4 + 3) - (2x^2 - 5)(3x^2 - 7)$$

Solución:

Para desarrollar la expresión trabajaremos las multiplicaciones por separado, se desarrolla primero la multiplicación de la izquierda:

$$\begin{aligned}(x^4 - 4)(x^4 + 3) &= (x^4)^2 + (-4 \times 1 + 3 \times 1)x^4 - 12 \\ &= x^{4 \cdot 2} + (-4 + 3)x^4 - 12 \\ &= x^8 - x^4 - 12\end{aligned}$$

Ahora se efectúa la multiplicación de la derecha:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5)(3x^2 - 7) &= (2 \times 3)(x^2)^2 + (-5 \times 3 + 2 \times (-7))x^2 + (-5 \times -7) \\ &= (6)x^{2 \cdot 2} + (-15 - 14)x^2 + (35) \\ &= 6x^4 - 29x^2 + 35\end{aligned}$$

Se procede a sustituir el resultado de los productos efectuados:

$$\begin{aligned}(x^4 - 4)(x^4 + 3) - (2x^2 - 5)(3x^2 - 7) &= (x^8 - x^4 - 12) - (6x^4 - x^2 + 35) \\ &= x^8 - x^4 - 12 - 6x^4 + 29x^2 - 35 \\ &= x^8 - 7x^4 + 29x^2 - 47\end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es $x^8 - 7x^4 + 29x^2 - 47$

.....

5. Si se conoce que $xy = b$ y que $a = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, determine una expresión para $(x + y)^2$ en términos de a y b .

Solución:

Como primer paso se desarrolla el cuadrado de la expresión dada:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Se sabe que $xy = b$ por lo que $2xy = 2b$. También se conoce que $a = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, entonces:

$$2a = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$$

Al sustituir la representación en términos de a y b , se tiene que:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= (x^2 + y^2) + 2xy \\ &= 2a + 2b\end{aligned}$$

Respuesta:

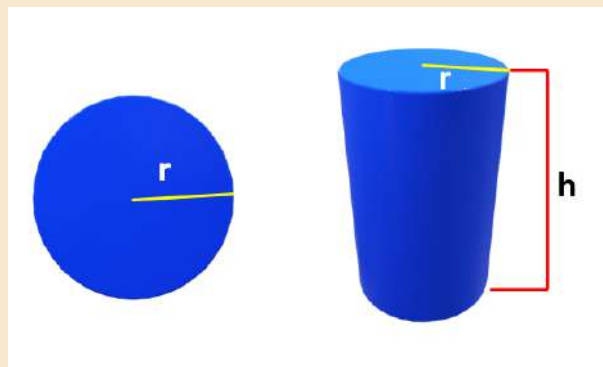
La expresión en términos de: a y b es $2a + 2b$

.....

6. Se sabe que el volumen de un cilindro está dado por $V = \pi * r^2 * h$. Si el radio de un cilindro mide 3 unidades menos que su altura, expresar el volumen del cilindro en términos de h .

Solución:

Para resolver el problema primero realizaremos un esquema de la situación:



Como podemos ver en el esquema, la base del cilindro es un círculo de radio r , el mismo se proyecta en el espacio y genera un cilindro de altura h , por lo que el volumen del mismo es la multiplicación del área de la base por la altura del sólido.

Sabemos que el radio es menor a la altura en 3 unidades, por lo que podemos expresar el radio en términos de la altura como:

$$r = h - 3$$

Para calcular el volumen en términos de la altura, sustituiremos en la fórmula que se nos indicó previamente.

$$V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times (h - 3)^2 \times h$$

Para desarrollar el volumen aplicaremos los productos notables:

$$\begin{aligned}V &= \pi(h-3)^2 \times h \\ &= \pi(h^2 - 6h + 9)h \\ &= \pi(h^3 - 6h^2 + 9h)\end{aligned}$$

Respuesta:

El volumen del cilindro en términos de la altura h es igual a $V = \pi(h^3 - 6h^2 + 9h)$

.....

7. Simplifique la expresión

$$(3x + 2y)^4$$

Solución:

Podemos ver en la expresión que tenemos un binomio elevado a la cuarta potencia, se identifica en el triángulo de Pascal que los coeficientes para la cuarta potencia se ubican en la quinta fila de la siguiente imagen y son 1, 4, 6, 4, 1. Esto nos servirá como guía para poder desarrollar la expresión.

				1					
			1		1				
		1		2		1			
	1		3		3		1		
	1	4		6		4		1	
	1	5	10		10	5		1	
	1	6	15	20		15	6		1
	1	7	21	35	35	21	7		1
1	8	28	56	70	56	28	8		1

Procedemos a desarrollar la expresión utilizando los coeficientes indicados, de la siguiente forma:

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

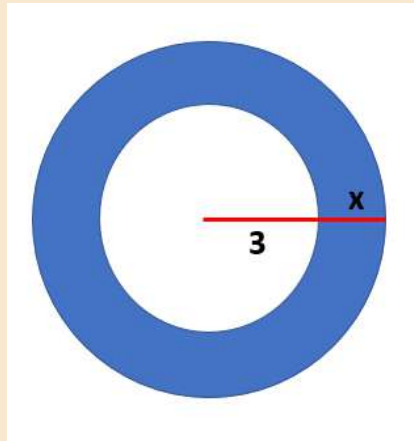
Aplicaremos esto entonces a la expresión dada:

$$\begin{aligned}
 (3x + 2y)^4 &= 1(3x)^4 + 4(3x)^3(2y) + 6(3x)^2(2y)^2 + 4(3x)(2y)^3 + 1(2y)^4 \\
 &= 81x^4 + 4(27x^3)(2y) + 6(9x^2)(4y^2) + 4(3x)(8y^3) + 16y^4 \\
 &= 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4
 \end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es igual a $81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4$

8. Determinar el área sombreada en términos de x



Solución:

Para determinar una expresión para el área sombreada de la figura restaremos las áreas de los dos círculos que la forman. Tenemos un círculo de radio 3 y un círculo de radio $x+3$, procedemos a calcular el área de cada uno.

Área 1: $r = 3$

$$A_1 = \pi \times r_1^2 = \pi \times (3)^2 = 9\pi$$

Área 2: $r = x+3$

$$A_2 = \pi \times r_2^2 = \pi \times (x+3)^2$$

El área sombreada será el resultado de restar A_1 al de A_2 ; desarrollaremos A_2 por medio de productos notables.

$$\begin{aligned} A_S &= A_2 - A_1 \\ &= \pi(x+3)^2 - 9\pi \\ &= \pi(x^2 + 6x + 9) - 9\pi \\ &= \pi(x^2 + 6x + 9 - 9) \\ &= \pi(x^2 + 6x) \end{aligned}$$

Respuesta:

El área sombreada está dada por: $\pi(x^2 + 6x)$

5.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Desarrolle la expresión por medio de productos notables $(2x + 3 - y)^2$
R/ $4x^2 + y^2 + 12x - 6y - 4xy + 9$
2. Desarrolle la expresión por medio de productos notables $(x + y + 3)^2 - (x - y + 2)^2$
R/ $4xy + 2x + 10y + 5$
3. Desarrolle la expresión por medio de productos notables $5y(y - 5)^2 - (y - 5)(y + 5)$
R/ $5y^3 - 51y^2 + 125y + 25$
4. Si $u = x + h$, encontrar el resultado de efectuar: $(3u^2 + 2u - 2) - (3x^2 + 2x - 2)$
R/ $3h^2 + 6xh + 2h$
5. Un jardín rectangular está rodeado por un camino que mide 2 metros de ancho. La longitud del jardín es 2 veces su ancho. Exprese el área del camino que rodea del jardín en términos del ancho del mismo.
R/ El área del camino se expresa como: $12a + 16$

6. Factorización de polinomios

En el módulo anterior se estudiaron procedimientos para factorizar números, los cuales básicamente consisten en determinar los factores que al multiplicarse dan como resultado el número dado. Para reactivar esos conocimientos, se establece que los factores enteros positivos de 12 son: 1×12 , 2×6 y 3×4 .

Cuando se requiere factorizar expresiones algebraicas, el concepto es similar, pues se trata de expresarlas como el producto de otras expresiones más sencillas. Para ello se consideran varias características de las expresiones dadas para relacionarlas con alguno de los productos notables recientemente estudiados.

Los libros de texto presentan varias clasificaciones de los posibles casos de factorización, en este documento se presentan los que se consideran de más utilidad.

■ Factor común

Se caracteriza porque en todos los términos de la expresión se identifica una parte común que puede abarcar a los coeficientes y la parte literal. Esta parte común corresponde a las literales comunes con el menor exponente, el cual es el primero de los factores; el otro factor se obtiene al dividir cada término de la expresión original entre el factor común.

Ejemplos

1. Factorizar la expresión $3x^2y + 6x^2y^2 - 15x^3y^2 + 9x^2yz + 24x^2y^2w$

Al analizar la expresión se determina que el factor común es $3x^2y$. Al dividir cada término entre este factor común se obtiene:

$$\frac{3x^2y}{3x^2y} = 1, \quad \frac{6x^2y^2}{3x^2y} = 2y, \quad \frac{-15x^3y^2}{3x^2y} = -5xy, \quad \frac{9x^2yz}{3x^2y} = 3z, \quad \frac{24x^2y^2w}{3x^2y} = 8yw$$

$$3x^2y + 6x^2y^2 - 15x^3y^2 + 9x^2yz + 24x^2y^2w = 3x^2y(1 + 2y - 5xy + 3z + 8yw)$$

2. Para factorizar la expresión siguiente: $-a - b + r(a + b)$ debe notarse que en el segundo término se incluye entre paréntesis $a + b$, lo que sugiere reescribir la expresión como: $-(a + b) + r(a + b)$ con lo que se hace evidente cuál es el factor común. Así,

$$-(a + b) + r(a + b) = (a + b)(-1 + r)$$

■ Agrupación de términos

En algunas ocasiones, se observa que no existe un factor común para todos los términos, sino que es parcial, por lo que se procede a realizar agrupaciones que permitan obtener un factor común y proceder como en los ejemplos anteriores. Es importante tener presente que al ingresar términos dentro de un paréntesis u otro signo de agrupación, los términos conservan su signo si se antepone $+$ y lo cambian si se antepone $-$.

Ejemplos

1. Para factorizar la expresión $8ay - 2by - 5bx + 20ax$, se agrupan así:

$$\begin{aligned} 8ay - 2by - 5bx + 20ax &= (8ay - 2by) + (20ax - 5bx) \\ &= 2y(4a - b) + 5x(4a - b) \\ &= (4a - b)(2y + 5x) \end{aligned}$$

Otra agrupación posible de los términos es:

$$\begin{aligned} 8ay - 2by - 5bx + 20ax &= (8ay + 20ax) - (2by + 5bx) \\ &= 4a(2y + 5x) - b(2y + 5x) \\ &= (2y + 5x)(4a - b) \end{aligned}$$

2. Factorizar la expresión $3n^4x + a^2b^3x^2 + a^2b^3 - n^4 - n^4x^2 - 3a^2b^3x$

$$\begin{aligned} (3n^4x - n^4 - n^4x^2) + (a^2b^3x^2 + a^2b^3 - 3a^2b^3x) &= n^4(3x - 1 - x^2) + a^2b^3(x^2 + 1 - 3x) \\ &= n^4(3x - 1 - x^2) - a^2b^3(3x - 1 - x^2) \\ &= (3x - 1 - x^2)(n^4 - a^2b^3) \end{aligned}$$

■ Diferencia de cuadrados

En este caso, es posible identificar dos expresiones restadas, a cada una de las cuales puede extraerse la raíz cuadrada. Su factorización se asocia directamente con uno de los productos notables estudiados:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Ejemplos: factorizar las expresiones dadas.

- $64a^2 - (a - 2b)^2 = [8a - (a - 2b)][8a + (a - 2b)] = (8a - a + 2b)(8a + a - 2b) = (7a + 2b)(9a - b).$
- $(a - b)^2 - (c + d)^2 = [(a - b) - (c + d)][(a - b) + (c + d)] = (a - b - c - d)(a - b + c + d)$

■ Trinomios

- El caso más conocido es llamado *Trinomio cuadrado perfecto*, el que se caracteriza porque dos de sus términos son cuadrados de otros términos y porque el doble producto de sus raíces equivale al término restante. Su factorización se relaciona de forma directa con el producto notable que denota al resultado de elevar al cuadrado un binomio:

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Se ejemplifica al factorizar los siguientes trinomios: $81z^2 + 36z + 4 = (9z + 2)^2$. Se puede verificar que $2(9z)(2) = 36z$.

$$x^2 + 2x(x+y) + (x+y)^2 = (x+x+y)^2 = (2x+y)^2$$

$$4 - 12(1-b) + 9(1-b)^2 = [2 - 3(1-b)]^2 = (2-3+3b)^2 = (-1+3b)^2 = (3b-1)^2$$

Es importante aclarar que algunos trinomios no son cuadrados perfectos, pero se pueden completar por medio de la suma y resta de la misma expresión, con base en la propiedad enunciada como:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Para ejemplificar, se muestra la factorización de la expresión dada por $x^4 + x^2y^2 + y^4$. Se determina que el doble producto de las raíces del primero y del tercero de los términos dados es: $2x^2y^2$. Sin embargo, la expresión solo incluye uno de tales términos, por lo que se agrega el faltante para completar los dos que se requieren:

$$+ x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2$$

$$= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$$

Se factoriza el trinomio y se obtiene:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

Se identifica que se generó una diferencia de cuadrados, por lo cual se factoriza así:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

En el segundo ejemplo, se busca factorizar la siguiente expresión:

$$a^2 - 16 - x^2 + 36 + 12a - 8x$$

La primera inspección permite identificar un trinomio para la variable a y otro para x , por lo que se agrupan los términos de la siguiente forma:

$$(a^2 + 12a + 36) - (x^2 + 8x + 16)$$

Se factorizan ambos trinomios y se obtiene una diferencia de cuadrados que a su vez se factoriza así:

$$(a+6)^2 - (x+4)^2 = [(a+6) - (x+4)][(a+6) + (x+4)] = (a-x+2)(a+x+10)$$

- La factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y de la forma $ax^2 + bx + c$, se relaciona con los productos notables que les dan origen, tomando en consideración lo siguiente:
 - El producto de los primeros términos de ambos binomios corresponde al término cuadrático del trinomio original.
 - Los factores del término c corresponden a los segundos términos de los binomios que se forman para la factorización.
 - Al efectuar los productos de los factores de c , por los factores del primer término del trinomio, se obtiene el término restante de la expresión original.

A continuación, se aplican reglas prácticas para factorizar el trinomio $m^2 - 41m + 400$:

El primer término de cada binomio es factor de $m^2 = m \times m$

El segundo término de los binomios es factor de 400:

$$1 \times 400, 2 \times 200, 4 \times 100, 5 \times 80, 8 \times 50, 10 \times 40, 16 \times 25.$$

El signo del primer factor es $-$ mientras que el del segundo es el producto de $(-)(+) = -$

$$m^2 - 41m + 400 = (m - ?)(m - ?)$$

Si los signos entre ambos términos de cada binomio son iguales, como en este caso, se requieren dos números que al multiplicarse den como resultado 400 y cuya suma sea $-41m$. Se analizan las parejas de factores de 400 y se identifica la que satisfaga las condiciones:

$$-25m - 16m = -41m$$

Por lo que:

$$m^2 - 41m + 400 = (m - 16)(m - 25)$$

Observación: la regla funciona para el caso en que los signos en los binomios sean distintos, con la modificación que el número mayor (en valor absoluto) corresponde al primer binomio.

El siguiente ejemplo muestra la factorización de un trinomio en el cual todos los términos contienen una parte literal: $a^2 + ab - 56b^2$.

El primer término de ambos binomios es a , mientras que los factores de $-56b^2$, se ubicarán como el segundo término de cada uno.

El signo $+$ se coloca en primer binomio y el signo $-$ corresponde al segundo.

$$a^2 + ab - 56b^2 = (a + ?)(a - ?)$$

Al realizar la prueba con $8b$ y $-7b$, se obtiene: $8ab - 7ab = ab$, entonces la factorización buscada es:

$$a^2 + ab - 56b^2 = (a + 8b)(a - 7b)$$

Los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, se pueden factorizar adaptando la estrategia anterior para el caso en que el coeficiente del término principal, sea distinto de 1.

Para factorizar $5x^6 + 4x^3 - 12$, se identifica que en el primer término de cada binomio se acompañará x^3 de un factor de 5, mientras que en el segundo término se colocan factores de -12 :

$$5x^6 + 4x^3 - 12 = (5x^3 - 6)(x^3 + 2)$$

Se puede verificar que: $10x^3 - 6x^3 = 4x^3$, $(-6)(2) = -12$, y que $5x^3(x^3) = 5x^6$.

Para ampliar las posibilidades que pueden presentarse, se requiere factorizar el trinomio dado por: $11ab - 6b^2 - 4a^2$. Una estrategia para facilitar el proceso consiste en ordenarlo e introducirlo en un paréntesis al que se antepone el signo menos, por lo cual se cambian los signos de los términos.

$$11ab - 6b^2 - 4a^2 = -(4a^2 - 11ab + 6b^2) = -(4a - 3b)(a - 2b)$$

■ Suma o diferencia de cubos

Los factores que permiten expresar una suma o diferencia de cubos, se obtienen de forma similar: el primer factor lo forman la suma o diferencia de las raíces cúbicas, mientras que el segundo factor incluye al cuadrado de la primera raíz cúbica, seguido del producto de dichas raíces y se concluye con el cuadrado de la segunda raíz cúbica. Los signos en el segundo factor son todos positivos para el caso de la resta de los cubos, mientras que alternan positivo y negativo en caso de la suma. En forma simbólica, se representa así:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

Se ejemplifica la aplicación de esta regla práctica con los siguientes ejercicios:

1. Factorice la expresión $8 + (a - b)^3$

$$\begin{aligned}8 + (a - b)^3 &= (2 + b)[22 - 2(a - b) + (a - b)^2] \\&= (2 + b)(4 - 2a + 2b + a^2 - 2ab + b^2) \\&= (2 + b)(4 - 2a + 2b + a^2 - 2ab + b^2)\end{aligned}$$

2. Factorice la expresión $(m - 2)^3 - (m + 3)^3$

$$\begin{aligned}(m - 2)^3 - (m + 3)^3 &= [(m - 2) - (m + 3)][(m - 2)^2 + (m - 2)(m + 3) + (m + 3)^2] \\&= [m - 2 - m - 3][(m^2 - 4m + 4) + (m^2 - m - 6) + (m^2 + 6m + 9)] \\&= -5(3m^2 + m + 7).\end{aligned}$$

■ Cubo de un binomio

Las expresiones que pueden factorizarse como el cubo de un binomio, se estudiaron entre los productos notables, por lo que ahora se sigue el proceso inverso, es decir,

$$\begin{aligned}a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a - b)^3\end{aligned}$$

Como ejemplos de este tipo de factorización, se presentan las siguientes expresiones:

1. Factorice la expresión $a^9 - 9a^6b + 27a^3b^2 - 27b^3$

$$\begin{aligned}a^9 - 9a^6b + 27a^3b^2 - 27b^3 &= (a^3)^3 - 3(a^3)^2(3b) + 3(a^3)(3b)^2 - (3b)^3 \\&= (a^3 - 3b)^3\end{aligned}$$

2. Factorice la expresión $1 + 3x^{12} + 3x^6 + x^{18}$

$$\begin{aligned}1 + 3x^6 + 3x^{12} + x^{18} &= 1 + 3(1)^2(x^6) + 3(1)(x^6)^2 + (x^6)^3 \\&= (1 + x^6)^3\end{aligned}$$

■ Combinación de procesos de factorización

Es común que el proceso de factorización de una expresión requiera aplicar varias estrategias de forma escalonada, por lo que se presentan algunos ejemplos en los que se requiere expresar en forma de factores las expresiones dadas.

1. Factorice la expresión $18a^2b + 60ab^2 + 50b^3$

$$\begin{aligned}18a^2b + 60ab^2 + 50b^3 &= 2b(9a^2 + 30ab + 25b^2) \\&= 2b(3a + 5b)^2\end{aligned}$$

Se identificó un factor común y se factorizó el trinomio restante.

2. Factorice la expresión $m^6 + 5m^5 - 81m^2 - 405m$

$$\begin{aligned}m^6 + 5m^5 - 81m^2 - 405m &= m(m^5 + 5m^4 - 81m - 405) \\&= m[(m^5 + 5m^4) - (81m + 405)] \\&= m[m^4(m + 5) - 81(m + 5)] \\&= m(m + 5)(m^4 - 81) \\&= m(m + 5)(m^2 - 9)(m^2 + 9) \\&= m(m + 5)(m - 3)(m + 3)(m^2 + 9)\end{aligned}$$

Se inicia identificando un factor común, luego se agruparon términos para obtener dos factores más, de los cuales uno de ellos se factoriza dos veces como una diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} 3. \text{ Factorice la expresión: } 1 - x^6y^6 \\ 1 - x^6y^6 &= (1 - x^3y^3)(1 + x^3y^3) \\ &= (1 - xy)(1 + xy + x^2y^2)(1 + xy)(1 - xy + x^2y^2) \end{aligned}$$

Se factorizó primero como diferencia de cuadrados y luego como diferencia y suma de cubos.

$$\begin{aligned} 4. \text{ Factorice la expresión } 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^2y^2 + 2xy^2 + 4y^2 \\ 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^2y^2 + 2xy^2 + 4y^2 &= (2x^4 - 2x^2y^2) - (4x^2 - 4y^2) - (2x^3 - 2xy^2) \\ &= 2x^2(x^2 - y^2) - 4(x^2 - y^2) - 2x(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(2x^2 - 2x - 4) \\ &= 2(x - y)(x + y)(x^2 - x - 2) \end{aligned}$$

.....

6.1 Ejercicios resueltos

1. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$a^2 + b^2 - 4c^2 + 2ab + 3ac + 3bc$$

Solución:

Reordenamos la expresión original.

$$(a^2 + 2ab + b^2) + (3ac + 3bc) - 4c^2$$

Aplicando los conceptos de factorización de un trinomio cuadrado perfecto y un factor común se tiene que:

$$(a + b)^2 + 3c(a + b) - 4c^2$$

Para factorizar la expresión lo tomaremos como un trinomio donde el primer término es $a + b$ y el segundo factor de $-4c^2$.

$$\begin{aligned} &= ((a + b) + 4c)((a + b) - c) \\ &= (a + b + 4c)(a + b - c) \end{aligned}$$

Se verifica que:

$$4c(a + b) - c(a + b) = 3c(a + b)$$

Con esto se cumplen las condiciones del trinomio.

Respuesta:

La factorización de la expresión es igual a: $(a + b + 4c)(a + b - c)$

2. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$16x^4 - 24x^2y + 9y^2 - 64z^2$$

Solución:

Para factorizar la expresión nos enfocamos en los primeros tres términos buscando trabajarlo como un trinomio.

$$\begin{aligned} & (16x^4 - 24x^2y + 9y^2) - 64z^2 \\ & = (4x^2 - 3y)^2 - 64z^2 \end{aligned}$$

Ahora podemos trabajarlo como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} & = ((4x^2 - 3y) - 8z)((4x^2 - 3y) + 8z) \\ & = (4x^2 - 3y - 8z)(4x^2 - 3y + 8z) \end{aligned}$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(4x^2 - 3y - 8z)(4x^2 - 3y + 8z)$

.....

3. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$36m^4 + 15m^2 + 4$$

Solución:

Para poder factorizar la expresión primero debemos completar el trinomio, la completación dependerá de $36m^4$ y 4 para saber cuanto debemos agregar encontramos las raíces de cada uno, las cuáles son $6m$ y 2.

El segundo término del trinomio debe ser el doble de la multiplicación de los factores que encontramos:

$$= 6m^2 * 2 * 2 = 24m^2$$

Con esto podemos ver que hacen falta $9m^2$, para completar el trinomio sumamos y restamos $9m^2$ pues $9m^2 - 9m^2 = 0$, lo cual no afecta la expresión.

$$\begin{aligned} & (36m^4 + 15m^2 + 4 + 9m^2) - 9m^2 \\ & = (36m^4 + 24m^2 + 4) - 9m^2 \end{aligned}$$

Ahora factorizamos el trinomio

$$= (6m^2 + 2)^2 - 9m^2$$

Posteriormente lo tratamos como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} & = ((6m^2 + 2) - 3m)((6m^2 + 2) + 3m) \\ & = (6m^2 + 2 - 3m)(6m^2 + 2 + 3m) \\ & = (6m^2 - 3m + 2)(6m^2 + 3m + 2) \end{aligned}$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es $(6m^2 - 3m + 2)(6m^2 + 3m + 2)$

.....

4. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$a^4 + 4a^2 + 16$$

Solución:

Al observar la expresión podemos ver que existe la posibilidad de completarla para trabajarla como un trinomio. Para ello necesitamos las raíces de a^4 y 16 que son a^2 y 4 respectivamente.

Para completar el trinomio el segundo término debe ser el doble de la multiplicación de los factores previamente encontrados:

$$= a^2 * 4 * 2 = 8a^2$$

Con esto podemos ver que hacen falta $4a^2$, para completar el trinomio sumamos y restamos $4a^2$ pues $4a^2 - 4a^2 = 0$ lo cual no afecta la expresión. Reescribiendo obtenemos:

$$\begin{aligned} &= (a^4 + 4a^2 + 16 + 4a^2) - 4a^2 \\ &= (a^4 + 8a^2 + 16) - 4a^2 \end{aligned}$$

Ahora factorizamos el trinomio

$$= (a^2 + 4)^2 - 4a^2$$

A continuación, lo tratamos como una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} &= ((a^2 + 4) - 2a)((a^2 + 4) + 2a) \\ &= (a^2 + 4 - 2a)(a^2 + 4 + 2a) \\ &= (a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4) \end{aligned}$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4)$

.....

5. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$x^4 + x^3 - y^4 - y^3 - xy^3 + x^3y$$

Solución:

Para poder factorizar la expresión se agrupan los términos formando 3 binomios.

$$x^4 + x^3 - y^4 - y^3 - xy^3 + x^3y$$

Empezamos por agrupar términos:

$$= (x^4 - xy^3) + (x^3 - y^3) + (x^3y - y^4)$$

El siguiente paso es aplicar el factor común al primer y tercer binomio de la nueva expresión.

$$= x(x^3 - y^3) + (x^3 - y^3) + y(x^3 - y^3)$$

Ahora aplicamos el factor común $x^3 - y^3$ a los tres binomios:

$$= (x^3 - y^3)(x + 1 + y)$$

Finalmente, se factoriza la diferencia de cubos.

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y + 1)$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y + 1)$

.....

6. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$y^6 - z^6$$

Solución:

Realizaremos primero una diferencia de cuadrados de la siguiente manera:

$$= (y^3 - z^3)(y^3 + z^3)$$

Ahora podemos aplicar una diferencia y una suma de cubos respectivamente

$$= (y - z)(y^2 + yz + z^2)(y + z)(y^2 - yz + z^2)$$

Reordenando

$$= (y - z)(y + z)(y^2 + yz + z^2)(y^2 - yz + z^2)$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(y - z)(y + z)(y^2 + yz + z^2)(y^2 - yz + z^2)$

.....

7. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 9 - 8x - 8y + 24$$

Solución:

En los primeros tres términos puede reconocerse un trinomio cuadrado perfecto, mientras que los 3 restantes tienen un factor común. Se agruparán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &= [(x + y)^2 - 6(x + y) + 9] - (8x + 8y - 24) \\ &= [(x + y) - 3]^2 - 8(x + y - 3) \\ &= ((x + y) - 3)^2 - 8(x + y - 3) \end{aligned}$$

En la nueva expresión podemos observar que $(x + y - 3)$ es factor común

$$\begin{aligned} &= (x + y - 3)((x + y - 3) - 8) \\ &= (x + y - 3)(x + y - 3 - 8) \\ &= (x + y - 3)(x + y - 11) \end{aligned}$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(x + y - 3)(x + y - 11)$

.....

8. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$m^3 - 5mn + 3m^2 - n^3 + 2n^2$$

Solución:

Para factorizar la expresión primero agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$(m^3 - n^3) + (3m^2 - 5mn + 2n^2)2$$

Se tratarán como una diferencia de cubos y un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. Factorizamos por separado y luego se sustituye.

$$(m^3 - n^3) = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

Para el trinomio, se generan dos binomios, los primeros términos deben generar como producto $3m^2$ y los segundos, $2n^2$

$$\begin{aligned} 3m^2 &= 3m(m) \\ 2n^2 &= 2n(n) \\ 3m^2 - 5mn + 2n^2 &= (3m - 2n)(m - n) \end{aligned}$$

El signo de los productos es negativo y suma $-5mn$; $-2mn - 3mn = -5mn$, tendremos entonces:

$$\begin{aligned} &(m^3 - n^3) + (3m^2 - 5mn + 2n^2) \\ &= (m - n)(m^2 + mn + n^2) + (3m - 2n)(m - n) \end{aligned}$$

Podemos ver que se tiene un factor común $(m - n)$ por lo que la expresión final será

$$\begin{aligned} &= (m - n)((m^2 + mn + n^2) + (3m - 2n)) \\ &= (m - n)(m^2 + mn + n^2 + 3m - 2n) \\ &= (m - n)(m^2 + mn + n^2 + 3m - 2n) \end{aligned}$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $(m - n)(m^2 + mn + n^2 + 3m - 2n)$

.....

9. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$x^{28} - x$$

Solución:

El primer paso para factorizar la expresión es sacar el factor común x

$$x^{28} - x = x(x^{27} - 1)$$

Ahora, podemos tratar el binomio como una diferencia de cubos.

$$= x(x^9 - 1)(x^{18} + x^9 + 1)$$

Nuevamente podemos factorizar como una diferencia de cubos para $(x^9 - 1)$

$$x(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)$$

Realizamos una nueva diferencia de cubos para $(x^3 - 1)$

$$x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)$

.....

10. Simplifique la siguiente expresión por medio de la factorización

$$b^6c^2 - c + b^6c - c^2$$

Solución:

Para factorizar la expresión agrupamos los términos de la siguiente manera:

$$(b^6c^2 - c^2) + (b^6c - c)$$

Ahora, obtenemos factor común en cada uno

$$= c^2(b^6 - 1) + c(b^6 - 1)$$

Nuevamente, se extrae el factor común $b^6 - 1$ a la expresión

$$= (b^6 - 1)(c^2 + c)$$

Luego, aplicamos una diferencia de cuadrados al primer factor y factor común al segundo

$$= (b^3 - 1)(b^3 + 1)c(c + 1)$$

Se factoriza una diferencia de cubos en el primer factor y una suma de cubos al segundo

$$(b - 1)(b^2 + b + 1)(b + 1)(b^2 - b + 1)c(c + 1)$$

Reordenamos la expresión:

$$c(c + 1)(b - 1)(b + 1)(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$$

Respuesta:

La factorización de la expresión es: $c(c + 1)(b - 1)(b + 1)(b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$

6.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

Factorizar completamente las expresiones dadas

1. $x^3 - xy^2 - y^3 + x^2 - y^2 + x^2y$
R/ $(x - y)(x + y)(x + 1 + y)$
2. $6mn + 4 - m^2 - 9n^2$
R/ $(2 - m + 3n)(2 + m - 3n)$
3. $a^8 - 14a^4 + 25$
R/ $(a^4 - 2a^2 - 5)(a^4 + 2a^2 - 5)$
4. $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$
R/ $(2x^2 + y - xy)(2x^2 + y + xy)$
5. $u^7 + u^4 - 2u^3 - 2u^6$
R/ $u^3[(u + 1)(u^2 - u + 1)(u - 2)]$
6. $x^8 - y^8$
R/ $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$
7. $4x^2 + 7mnx - 15m^2n^2 - 3x - 9xmn$
R/ $(x + 3mn)(4x - 5mn - 3)$
8. $a^7 + 27a^4 - a^3 - 27$
R/ $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1)$
9. $a^{17} - a$
R/ $a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 + 1)$
10. $(m^2 - mn)(n^4 - 82n^2 + 81)$
R/ $m(m - n)(n - 9)(n + 9)(n - 1)(n + 1)$

7. Expresiones algebraicas racionales

Las expresiones algebraicas que se representan de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, suelen llamarse también *expresiones algebraicas racionales*, tienen propiedades similares a las fracciones aritméticas que se estudiaron en el módulo anterior.

Dos fracciones algebraicas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ (b y d diferentes de cero), son equivalentes si se cumple que $a \times d = b \times c$.

Simplificar una fracción algebraica consiste en encontrar una fracción más simple que sea equivalente. En el caso en que el numerador y el denominador son monomios, se aplican propiedades de la potenciación para reducir a la mínima expresión; para el caso en que se involucren polinomios, se factorizan y se reducen los factores comunes.

Ejemplos: simplificar las expresiones dadas, asumiendo que los denominadores son diferentes de cero.

1. Simplifique

$$\frac{(72a^5b^6c^4)}{(-48a^3b^4c^7)} = -\frac{(3a^2b^2)}{(2c^3)}$$

2. Simplifique

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x^2 - 4)} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

3. Simplifique

$$\frac{2(a+b)^2 + (a+b) - 6}{2(a+b)^2 + 5(a+b) - 12} = \frac{[2((a+b)-3)][((a+b)+2)]}{[(2(a+b)-3)][((a+b)+4)]} = \frac{a+b+2}{a+b+4}$$

La jerarquía de las operaciones con fracciones algebraicas es similar a la estudiada para las fracciones aritméticas, combinado con lo aprendido sobre la factorización algebraica para identificar el denominador común y simplificar los resultados.

Ejemplos:

- a) Para sumar o restar fracciones algebraicas de igual de denominador, se operan los numeradores y se conserva el mismo denominador. Simplificar la expresión dada:

$$\frac{2a-1}{a^2-3a-4} + \frac{3}{a^2-3a-4} = \frac{2a-1+3}{(a-4)(a+1)} = \frac{2a+2}{(a-4)(a+1)} = \frac{2(a+1)}{(a-4)(a+1)} = \frac{2}{a-4}$$

- b) Para el caso en que los denominadores son diferentes, se factorizan y a partir de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, se construye el denominador común. Simplificar:

$$\begin{aligned} & \frac{13}{6m^2+5m-6} + \frac{4m-8}{3m^2-8m+4} - \frac{7}{2m^2-m-6} \\ &= \frac{13}{(3m-2)(2m+3)} + \frac{4m-8}{(3m-2)(m-2)} - \frac{7}{(2m+3)(m-2)} \\ &= \frac{13(m-2) + 4(m-2)(2m+3) - 7(3m-2)}{(3m-2)(2m+3)(m-2)} \\ &= \frac{13m-26+8m^2-4m-24-21m+14}{(3m-2)(2m+3)(m-2)} \\ &= \frac{4(2m^2-3m-9)}{(3m-2)(2m+3)(m-2)} \\ &= \frac{4(2m+3)(m-3)}{(3m-2)(2m+3)(m-2)} \\ &= \frac{4(m-3)}{(3m-2)(m-2)} \end{aligned}$$

Las operaciones de multiplicación y división de fracciones algebraicas, conservan la definición y propiedades estudiadas en el módulo de fundamentos aritméticos.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

con la condición que b, c, d, son diferentes de cero.

Una estrategia eficiente para efectuar multiplicaciones y divisiones, consiste en factorizar los numeradores y denominadores, representar en forma indicada las operaciones y simplificar.

Ejemplos

a) Realice la operación

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^4 - 7x^2 + 12} \times \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 3} &= \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)(x - 3)(x - 2)}{(x^2 - 4)(x^3 - 3)(x + 3)(x + 1)} \\
&= \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)(x - 3)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)(x^3 - 3)(x + 3)(x + 1)} \\
&= \frac{(x - 1)(x - 3)^2}{(x + 2)(x^3 - 3)}
\end{aligned}$$

b) Realice la operación

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2a - 3} + \frac{3a + 12}{a^2 - 4a - 12} \div \frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 + 6a + 8} \\
&= \frac{a}{2a - 3} + \frac{3(a + 4)}{(a - 6)(a + 2)} \div \frac{(a + 4)(a + 4)}{(a + 4)(a + 2)} \\
&= \frac{a}{2a - 3} + \frac{3(a + 4)}{(a - 6)(a + 2)} \div \frac{(a + 4)}{(a + 2)} \\
&= \frac{a}{2a - 3} + \frac{3(a + 4)(a + 2)}{(a - 6)(a + 2)(a + 4)} = \frac{a}{2a - 3} + \frac{3}{(a - 6)} \\
&= \frac{a(a - 6) + 3(2a - 3)}{(2a - 3)(a - 6)} = \frac{a^2 - 6a + 6a - 9}{(2a - 3)(a - 6)} = \frac{a^2 - 9}{(2a - 3)(a - 6)} = \frac{(a - 3)(a + 3)}{(2a - 3)(a - 6)}
\end{aligned}$$

c) Realice la operación

$$\begin{aligned}
\left(m + 1 - \frac{3}{m - 1}\right) \div \left(m + 3 + \frac{3}{2m + 1}\right) \left(2m + 5 + \frac{7}{m - 2}\right) \\
&= \left(\frac{(m + 1)(m - 1) - 3}{m - 1}\right) \div \left(\frac{(m + 3)(2m + 1) + 3}{2m + 1}\right) \left(\frac{(2m + 5)(m - 2) + 7}{m - 2}\right) \\
&= \left(\frac{m^2 - 4}{m - 1}\right) \div \left(\frac{2m^2 + 7m + 6}{2m + 1}\right) \left(\frac{2m^2 + m - 3}{m - 2}\right) \\
&= \left(\frac{(m - 2)(m + 2)}{m - 1}\right) \div \left(\frac{(2m + 3)(m + 2)}{2m + 1}\right) \left(\frac{(2m + 3)(m - 1)}{m - 2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(m-2)(m+2)(2m+1)}{(m-1)(2m+3)(m+2)} \right) \times \left(\frac{(2m+3)(m-1)}{m-2} \right) \\
&= \left(\frac{(m-2)(2m+1)}{(m-1)(2m+3)} \right) \times \left(\frac{(2m+3)(m-1)}{m-2} \right) = \left(\frac{(m-2)(2m+1)(2m+3)(m-1)}{(m-1)(2m+3)(m-2)} \right) \\
&= 2m+1
\end{aligned}$$

.....

7.1 Ejercicios resueltos

1. Simplifique la siguiente expresión racional

$$\frac{a+1}{a^2+5a+6} + \frac{a+17}{a^2-a-12} - \frac{6}{a^2-2a-8}$$

Solución:

Para simplificar la expresión se factorizará los denominadores y se elige el mínimo común múltiplo: producto de factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

$$a^2 + 5a + 6 = (a+3)(a+2)$$

$$a^2 - a - 12 = (a-4)(a+3)$$

$$a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2)$$

El denominador común es: $(a+3)(a+2)(a-4)$, se reescriben las fracciones

$$= \frac{a+1}{(a+3)(a+2)} + \frac{a+17}{(a-4)(a+3)} - \frac{6}{(a-4)(a+2)}$$

Se transforman las expresiones a fracciones equivalentes del mismo denominador:

$$= \frac{(a+1)(a-4) + (a+17)(a+2) - 6(a+3)}{(a+3)(a+2)(a-4)}$$

Desarrollando las multiplicaciones del numerador, se obtiene.

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 - 4a + a - 4 + a^2 + 2a + 17a + 34 - 6a - 18}{(a+3)(a+2)(a-4)} \\
&= \frac{a^2 - 3a - 4 + a^2 + 19a + 34 - 6a - 18}{(a+3)(a+2)(a-4)}
\end{aligned}$$

Operando en el numerador se obtiene

$$= \frac{2a^2 + 10a + 12}{(a+3)(a+2)(a-4)}$$

Factorizando en el numerador

$$= \frac{2(a^2 + 5a + 6)}{(a+3)(a+2)(a-4)}$$

$$= \frac{2(a+3)(a+2)}{(a+3)(a+2)(a-4)}$$

Eliminando los términos semejantes se obtiene la siguiente expresión:

$$= \frac{\cancel{2(a+3)}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+3)}\cancel{(a+2)}(a-4)}$$

$$= \frac{2}{a-4}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{2}{a-4}$

.....

2. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} - \frac{3x-5}{2x^2+5x-3} + \frac{4x-5}{2x^2-5x+2}$$

Solución:

Procedemos a factorizar los denominadores de las fracciones

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$$

Se reescriben las fracciones incluyendo los denominares factorizados

$$\frac{x-7}{(x+3)(x-2)} - \frac{3x-5}{(2x-1)(x+3)} + \frac{4x-5}{(2x-1)(x-2)}$$

El denominador común es $(x+3)(x-2)(2x-1)$. Se transforman a fracciones equivalentes con el denominador común identificado:

$$= \frac{(x-7)(2x-1) - (3x-5)(x-2) + (4x-5)(x+3)}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

Es necesario efectuar los productos indicados y reducir los términos semejantes, aplicando lo aprendido anteriormente.

$$= \frac{2x^2 - x - 14x + 7 - (3x^2 - 6x - 5x + 10) + 4x^2 + 12x - 5x - 15}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 - 15x + 7 - 3x^2 + 11x - 10 + 4x^2 + 7x - 15}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

$$= \frac{3x^2 + 3x - 18}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

Procedemos a factorizar el trinomio ubicado en el numerador y se identifica que podemos eliminar $(x+3)$ y $(x-2)$

$$= \frac{3(x^2 + x - 6)}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

$$= \frac{3(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)(2x-1)}$$

$$= \frac{3\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}(2x-1)}$$

$$= \frac{3}{(2x-1)}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{3}{2x-1}$

.....

3. Efectuar el producto de las fracciones dadas

$$\left(\frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 + 12x + 36} \right) \left(\frac{x^2 + 13x + 42}{x^2 + 13x + 40} \right) \left(\frac{x^2 + 10x + 16}{x^2 + 2x - 35} \right)$$

Solución:

En las tres fracciones, el numerador y el denominador, son trinomios por lo que se escriben en forma factorizada.

$$= \left(\frac{(x+6)(x+5)}{(x+6)(x+6)} \right) \left(\frac{(x+7)(x+6)}{(x+5)(x+8)} \right) \left(\frac{(x+8)(x+2)}{(x+7)(x-5)} \right)$$

Se simplifica la primera fracción cancelando $x+6$ en el numerador y el denominador. Se dejan indicados los productos el numerador y en el denominador.

$$= \left(\frac{(x+5)}{(x+6)} \right) \left(\frac{(x+7)(x+6)}{(x+5)(x+8)} \right) \left(\frac{(x+8)(x+2)}{(x+7)(x-5)} \right)$$

Al identificar que se trata solo de productos, se realizan de forma simultánea:

$$= \frac{(x+5)(x+7)(x+6)(x+8)(x+2)}{(x+6)(x+5)(x+8)(x+7)(x-5)}$$

Identificamos que los factores $(x+5)$, $(x+7)$, $(x+6)$ y $(x+2)$ pueden eliminarse

$$= \frac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+7)}\cancel{(x+6)}\cancel{(x+8)}(x+2)}{\cancel{(x+6)}\cancel{(x+5)}\cancel{(x+8)}\cancel{(x+7)}(x-5)}$$

$$= \frac{x+2}{x-5}$$

Respuesta:

La multiplicación de las fracciones dadas es igual a: $\frac{x+2}{x-5}$

.....

4. Divida las fracciones dadas y simplifique a la fracción más sencilla posible

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x - 4} \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 8}$$

Solución:

Procedemos a factorizar los cuatro trinomios y reescribimos las fracciones dadas.

$$= \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)(x+1)} \div \frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-2)}$$

Se simplifica la segunda fracción, eliminando el factor $(x-2)$ y reescribimos

$$= \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)(x+1)} \div \frac{(x-2)}{(x-4)}$$

Se realiza la división de fracciones y se deja indicada, luego se simplifican las expresiones.

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)(x+1)} \right) \times \left(\frac{(x-4)}{(x-2)} \right) \\ &= \frac{(x+4)(x-2)(x-4)}{(x-4)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x+4)\cancel{(x-2)}\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+1)\cancel{(x-2)}} \\ &= \frac{x+4}{x+1} \end{aligned}$$

Respuesta:

La división de fracciones es igual a: $\frac{x+4}{x+1}$

.....

5. Realice la siguiente operación de fracciones

$$\frac{x^2 + xy - xz}{(x+y)^2 - z^2} \div \frac{x}{(x+z)^2 - y^2} \times \frac{xy - y^2 - yz}{(x-y)^2 - z^2}$$

Solución:

Iniciamos factorizando las expresiones incluidas en las fracciones dadas:

$$\frac{x(1+y-z)}{(x+y-z)(x+y+z)} \div \frac{x}{(x+z-y)(x+z+y)} \times \frac{y(x-y-z)}{(x-y-z)(x-y+z)}$$

Identificamos que es posible eliminar el factor $(x+y-z)$ en la primera fracción, mientras que en la tercera fracción se cancela $(x-y-z)$:

$$\frac{x}{(x+y+z)} \div \frac{x}{(x+z-y)(x+z+y)} \times \frac{y}{(x-y+z)}$$

La división y la multiplicación tienen la misma jerarquía, en ausencia de signos de agrupación se realizan en el orden en que se presentan:

$$= \frac{\cancel{x}(x+z-y)\cancel{(x+y+z)}(y)}{\cancel{x}(x+y+z)\cancel{(x-y+z)}}$$

Cancelamos los factores x , $(x+z-y)$ y $(x+y+z)$

$$= y$$

Respuesta:

El resultado de la operación es y

.....

6. Realice la siguiente operación algebraica

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \div \left(\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} \right)$$

Solución:

La jerarquía de operaciones nos indica que debemos efectuar primero las operaciones en el interior de los paréntesis.

$$= \left(\frac{2(a+x)(a-x) - x(a-x) + x(a+x)}{x(a+x)(a-x)} \right) \div \left(\frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{(a-x)(a+x)} \right)$$

Efectuamos los productos indicados y procedemos a simplificar las expresiones

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2a^2 - 2x^2 - ax + x^2 + ax + x^2}{x(a+x)(a-x)} \right) \div \left(\frac{(a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2)}{(a-x)(a+x)} \right) \\ &= \left(\frac{2a^2}{x(a+x)(a-x)} \right) \div \left(\frac{4ax}{(a-x)(a+x)} \right) \\ &= \frac{2a^2(a-x)(a+x)}{(a+x)(a-x)(4ax^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{2a^2(a-x)}(a+x)}{(\cancel{a+x})(\cancel{a-x})(4ax^2)}$$

$$\frac{a}{2x^2}$$

Respuesta:

El resultado de la operación es: $\frac{a}{2x^2}$

.....

7. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b} + \frac{a}{a+b}}$$

Solución:

Al observar la expresión, identificamos que debe simplificarse, por lo que se realizan primero las operaciones indicadas en el numerador y el denominador y transforman en expresiones más sencillas.

$$= \frac{\frac{a(a+b) - a(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{b(a+b) + a(a-b)}{(a-b)(a+b)}}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{a^2} + ab - \cancel{a^2} + ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{\cancel{ab} + b^2 + a^2 - \cancel{ab}}{(a-b)(a+b)}}$$

$$= \frac{\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{b^2 + a^2}{(a-b)(a+b)}}$$

Al efectuar la división, se cancelan los factores $(a-b)$ y $(a+b)$

$$= \frac{\frac{2ab}{(\cancel{a-b})(\cancel{a+b})}}{\frac{b^2 + a^2}{(\cancel{a-b})(\cancel{a+b})}}$$

$$= \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

.....

8. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{a-1}{a+2 - \frac{a^2+2}{a - \frac{a-2}{a+1}}}$$

Solución:

El numerador de la fracción es simple, por lo que, se reducirán las fracciones indicadas en el denominador de la fracción principal empezando por $a - \frac{a-2}{a+1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{a-1}{a+2 - \frac{a^2+2}{\frac{a(a+1) - (a-2)}{a+1}}} \\ &= \frac{a-1}{a+2 - \frac{a^2+2}{\frac{a^2+a-a+2}{a+1}}} \end{aligned}$$

Se simplifica la nueva fracción

$$= \frac{a-1}{a+2 - \frac{a^2+2}{\frac{a^2+2}{a+1}}}$$

Continuamos con la división de $\frac{a^2+2}{\frac{a^2+2}{a+1}}$ y simplificamos los resultados.

$$\begin{aligned} &= \frac{a-1}{a+2 - \frac{(a^2+2)(a+1)}{a^2+2}} \\ &= \frac{a-1}{a+2 - (a+1)} \\ &= \frac{a-1}{a+2-a-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{a-1}{1}$$

$$= a-1$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $a-1$

.....

9. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{1+x}{1-x}}}$$

Solución:

Es importante reconocer, que debemos simplificar desde el denominador de la fracción principal, empezando por $1 + \frac{1+x}{1-x}$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{\frac{1-x+1+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{\frac{2}{1-x}}}$$

Al efectuar la división de $\frac{1}{\frac{2}{1-x}}$ obtenemos la expresión:

$$= \frac{1}{x + \frac{1(1-x)}{2(1)}}$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1-x}{2}}$$

Se suma en el denominador de la fracción y se obtiene

$$= \frac{1}{\frac{2x+1-x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \\
 &= \frac{1 * 2}{(x+1) * 1} \\
 &= \frac{2}{x+1}
 \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{2}{x+1}$

.....

10. Simplifique la siguiente expresión

$$1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}$$

Solución:

Como podemos observar, la expresión requiere aplicar una jerarquía de operación escalonada, de abajo hacia arriba, empezamos por simplificar el denominador de la fracción principal $1 + \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}}}}
 \end{aligned}$$

Continuamos dividiendo las fracciones $\frac{1}{\frac{x+1}{x}}$:

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{x+1}}}}
 \end{aligned}$$

La secuencia de operación indica que procedemos a sumar nuevamente en el denominador de la fracción anterior

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{x+1+x}{x+1}}}}$$

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}}}$$

Se realizan todos los pasos intermedios para mejor orientación en el aprendizaje.

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1 + \frac{x+1}{2x+1}}}$$

Debemos identificar la secuencia operativa: división de fracciones, simplificación, suma e inicio de un nuevo ciclo.

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{\frac{2x+1+x+1}{2x+1}}}$$

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}}}$$

$$= 1 + \frac{x}{1 + \frac{2x+1}{3x+2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\frac{3x+2+2x+1}{3x+2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{\frac{5x+3}{3x+2}}$$

$$= 1 + \frac{x(3x+2)}{5x+3}$$

$$= 1 + \frac{3x^2+2x}{5x+3}$$

Se realiza la última suma y se simplifica

$$= \frac{5x + 3 + 3x^2 + 2x}{5x + 3}$$

$$= \frac{3x^2 + 7x + 3}{5x + 3}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{3x^2 + 7x + 3}{5x + 3}$

.....

7.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

Reduzca las expresiones algebraicas racionales

1. $\frac{4x-5}{x^2+x-12} + \frac{9}{18-3x-x^2} + \frac{2}{x^2+10x+24}$ **R/** $\frac{4}{x+4}$

2. $\frac{11}{12a^2-5a-2} - \frac{25}{4a^2-23a-6} + \frac{6a-20}{3a^2-20a+12}$ **R/** $\frac{6}{3a-2}$

3. $\frac{2x^2+15x+18}{12x^2-41x+24} \times \frac{12x^2-23x-24}{4x^2+27x+18} \times \frac{12x^2+10x+16}{x^2+2x-35}$ **R/** $\frac{3x-4}{4x-1}$

4. $\frac{a^2-4a-12}{a^2-7a+6} \div \frac{a^2+10a+16}{a^2+7a-8}$ **R/** 1

5. $\frac{x^3-1}{x^3-2x^2-3x} \times \frac{x+1}{x^2+x-2} \div \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2-6x}$ **R/** 1

6. $\left(n - \frac{2n-1}{n^2+2}\right) \div \left(n^2+1 - \frac{n-1}{n}\right)$ **R/** $\frac{n}{n^2+2}$

7. $\frac{\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}}{\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$ **R/** $\frac{x-1}{x+2}$

8. $\frac{1}{a - \frac{1}{a - \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}}$ **R/** $\frac{1}{a-a^2-1}$

$$9. \frac{1 + \frac{2m+n}{r-m-n}}{1 - \frac{n-2m}{r-m+n}} \quad \mathbf{R/} \quad \frac{r-m+n}{r-m-n}$$

$$10. \frac{\frac{a+1 - \frac{6a+12}{a+2}}{a+5}}{a+4 - \frac{11a+22}{a+2}} \quad \mathbf{R/} \quad \frac{(a-5)(a+7)}{(a+5)(a-7)}$$

8. Potenciación y radicación algebraica

En esta sección se amplían a las expresiones algebraicas, las definiciones y aplicaciones de las operaciones de potenciación y radicación estudiadas en el conjunto de números reales, las cuales se sintetizan a continuación.

■ Potenciación.

Si a , b , m y n son números reales, se cumple que:

1. Para multiplicar potencias de igual base, se conserva la base y eleva a la suma de los exponentes.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

2. Para efectuar la potencia de una potencia, se conserva la base y se eleva al producto de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

3. La potencia de un producto, equivale al producto de las potencias.

$$(ab)^n = a^n b^n$$

4. La potencia de un cociente equivale al cociente de las potencias ($b \neq 0$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

5. Para efectuar el cociente de potencias de igual base, se conserva la base y se eleva a la resta de los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

En particular, si $m = n$, se tiene que

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

Si $m < n$, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Como ejemplo, se efectúa:

$$\frac{a^5}{a^8} = a^{5-8} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Algunas consideraciones prácticas son importantes para resolver ejercicios que involucran exponentes negativos o fraccionarios, en procesos de realización de productos notables, factorización u operaciones con fracciones algebraicas.

Se explican mediante ejemplos:

- a) Se requiere transformar la expresión $3x^{-2}y^{-3}$ en otra equivalente con exponentes positivos. Debe notarse que los exponentes negativos afectan a x , y , no al coeficiente 3, por lo cual se escribe así:

$$3x^{-2}y^{-3} = 3 \times \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{y^3} = \frac{3}{x^2y^3}$$

La situación es diferente si se requiere transformar la expresión $(3x)^{-2}y^{-3}$, para lo cual se escribe

$$(3x)^{-2}y^{-3} = \frac{1}{(3x)^2} \times \frac{1}{y^3} = \frac{1}{3^2x^2y^3} = \frac{1}{9x^2y^3}$$

- b) Cuando se presentan expresiones fraccionarias elevadas a exponentes negativos, puede procederse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}$$

- c) Se busca simplificar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a^{1/2} - b^{1/2})^{-2}} &= \frac{1}{\frac{1}{(a^{1/2} - b^{1/2})^2}} = (a^{1/2} - b^{1/2})^2 \\ &= (a^{1/2})^2 - 2a^{1/2}b^{1/2} + (b^{1/2})^2 = a - 2(ab)^{1/2} + b \end{aligned}$$

- d) Simplificar la expresión siguiente: $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^{-3}$. En este caso es conveniente efectuar primero las operaciones indicadas en el paréntesis y luego transformar el exponente negativo.

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^{-3} = \left(\frac{x+1-x}{x(x+1)}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^{-3}$$

$$= \frac{(x^2 + x)^3}{1^3} = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3$$

■ Radicación

En el contexto aritmético se estudiaron las representaciones de expresiones radicales por medio de exponentes fraccionarios, de la siguiente forma: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, la cual está definida para n par si $a \geq 0$, mientras que si n es impar, está definida para todos los números reales.

De esta forma de representación y de las propiedades de la potenciación, se puede expresar

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{m/n}$$

En este caso tiene validez la propiedad enunciada como: $a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$, con $a \neq 0$.

Las propiedades más importantes por su aplicación se enuncian a continuación.

1. La raíz de índice n de un producto, equivale al producto de las raíces de índice n , de los factores.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

2. La raíz de índice n de una fracción, equivale al cociente de las raíces de índice n .

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ con } b \neq 0$$

3. La raíz de índice n de otro radical de índice m , equivale a un radical cuyo índice es el producto $n \times m$.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Observación importante

Debe tenerse presente siempre, que las propiedades que aplican al producto y a la división, **no son válidas** en el caso de la suma y de la resta, es decir:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

8.1 Ejercicios resueltos

1. Desarrolle la siguiente expresión

$$(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})^2$$

Solución:

Para desarrollar la expresión aplicaremos los conceptos de productos notables y leyes de exponentes.

$$\begin{aligned} & (p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= (p^{\frac{1}{2}})^2 + 2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + (q^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= (p^{\frac{2}{2}}) + 2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + (q^{\frac{2}{2}}) = p + 2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + q \end{aligned}$$

Respuesta:

El desarrollo de la expresión es: $p + 2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + q$

.....

2. Simplifique la siguiente expresión

$$\left(\frac{x^{1/6}y^{3/4}}{x^{2/3}y^{1/3}} \right)^6$$

Solución:

Para simplificar la expresión aplicaremos las leyes de exponentes, tendremos entonces:

$$= \frac{(x^{1/6}y^{3/4})^6}{(x^{2/3}y^{1/3})^6}$$

Aplicamos las propiedades de la potencia de un producto dentro del numerador y dentro del denominador

$$= \frac{(x^{1/6})^6(y^{3/4})^6}{(x^{2/3})^6(y^{1/3})^6}$$

Aplicando las leyes de exponentes

$$\begin{aligned} &= \frac{(x^{1 \cdot 6/6})(y^{3 \cdot 6/4})}{(x^{2 \cdot 6/3})(y^{1 \cdot 6/3})} \\ &= \frac{(x^{6/6})(y^{18/4})}{(x^{12/3})(y^{6/3})} \\ &= \frac{x \cdot y^{9/2}}{x^4 \cdot y^2} \end{aligned}$$

Finalmente simplificamos, aplicando propiedades de la división de potencias de igual base.

$$\begin{aligned} &= x^{1-4} \cdot y^{9/2-2} \\ &= x^{-3} \cdot y^{9/2-4/2} \\ &= x^{-3} \cdot y^{5/2} \\ &= \frac{y^{5/2}}{x^3} \end{aligned}$$

Respuesta:

La expresión simplificada es: $\frac{y^{5/2}}{x^3}$

.....

3. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{(2x^2y^{-3})^{-3}}{(2^{-4}x^{-5}y^7)^{-1}}$$

Solución:

Para simplificar la expresión aplicaremos las leyes de exponentes tanto en numerador como en el denominador que incluyen exponentes negativos y potencia de un producto.

$$\begin{aligned} &= \frac{(2)^{-3}(x^2)^{-3}(y^{-3})^{-3}}{(2^{-4})^{-1}(x^{-5})^{-1}(y^7)^{-1}} \\ &= \frac{2^{-3}x^{(2 \times -3)}y^{(-3 \times -3)}}{2^{(-4 \times -1)}x^{(-5 \times -1)}y^{(7 \times -1)}} \\ &= \frac{2^{-3}x^{-6}y^9}{2^4x^5y^{-7}} \end{aligned}$$

Procedemos a simplificar con base en reglas para la división de potencias de igual base.

$$\begin{aligned} &= 2^{-3-4}x^{-6-5}y^{9-(-7)} \\ &= 2^{-7}x^{-11}y^{16} \end{aligned}$$

Finalmente reescribimos la expresión como:

$$= \frac{y^{16}}{2^7x^{11}}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{y^{16}}{2^7x^{11}}$

.....

4.Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{x^{-1} + 3x^{-2}}{1 + 2x^{-1} - 3x^{-2}}$$

Solución:

Debemos identificar que en esta expresión no aparecen productos sino sumas y restas de términos que incluyen exponentes negativos. Para simplificar la expresión aplicaremos las leyes de exponentes tanto en el numerador como en el denominador. Reescribimos la expresión así:

$$= \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

Ahora se opera la suma y resta de fracciones

$$= \frac{\frac{x+3}{x^2}}{\frac{x^2+2x-3}{x^2}}$$

Factorizando en la fracción del denominador

$$= \frac{\frac{x+3}{x^2}}{\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}}$$

Dividiendo las fracciones se obtiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+3)x^2}{(x+3)(x-1)x^2} \\ &= \frac{\cancel{(x+3)}\cancel{x^2}}{\cancel{(x+3)}(x-1)\cancel{x^2}} \\ &= \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{1}{x-1}$

.....

5. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{3a^{-2} - 4a^{-1} + 1}{6a^{-2} - 5a^{-1} + 1}$$

Solución:

La expresión dada es similar a la del ejercicio anterior, pero, con más términos. Por lo que procedemos a simplificar aplicando las leyes de exponentes, reescribimos de la siguiente manera:

$$= \frac{3 * \frac{1}{a^2} - 4 * \frac{1}{a} + 1}{6 * \frac{1}{a^2} - 5 * \frac{1}{a} + 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{a^2} - \frac{4}{a} + 1}{\frac{6}{a^2} - \frac{5}{a} + 1}$$

Operamos las fracciones tanto en el numerador como en el denominador, identificando que en ambos casos el denominador común es a^2 .

$$= \frac{\frac{3 - 4a + a^2}{a^2}}{\frac{6 - 5a + a^2}{a^2}}$$

$$= \frac{\frac{a^2 - 4a + 3}{a^2}}{\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2}}$$

Factorizamos en el numerador de cada fracción y efectuamos la división de las fracciones resultantes.

$$= \frac{\frac{(a-3)(a-1)}{a^2}}{\frac{(a-3)(a-2)}{a^2}}$$

$$= \frac{(a-3)(a-1)a^2}{(a-3)(a-2)a^2}$$

Eliminando los factores comunes en el numerador y denominador se obtiene la fracción simplificada

$$= \frac{\cancel{(a-3)}(a-1)\cancel{a^2}}{\cancel{(a-3)}(a-2)\cancel{a^2}}$$

$$= \frac{a-1}{a-2}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{a-1}{a-2}$

.....

6. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{[(a+b)^{-1/2} + (a-b)^{-1/2}]^{-1} + [(a+b)^{-1/2} - (a-b)^{-1/2}]^{-1}}{[(a+b)^{-1/2} + (a-b)^{-1/2}]^{-1} - [(a+b)^{-1/2} - (a-b)^{-1/2}]^{-1}}$$

Solución:

Podemos notar que la expresión dada es notoriamente más complicada que las anteriores, por lo cual el orden adecuado y la correcta operación son importantes. Iniciamos con la transformación de las expresiones con exponentes negativos a positivos dentro de los corchetes.

$$= \frac{\left[\frac{1}{(a+b)^{1/2}} + \frac{1}{(a-b)^{1/2}} \right]^{-1} + \left[\frac{1}{(a+b)^{1/2}} - \frac{1}{(a-b)^{1/2}} \right]^{-1}}{\left[\frac{1}{(a+b)^{1/2}} + \frac{1}{(a-b)^{1/2}} \right]^{-1} - \left[\frac{1}{(a+b)^{1/2}} - \frac{1}{(a-b)^{1/2}} \right]^{-1}}$$

Realizamos las operaciones indicadas dentro de los corchetes, identificando que el denominador común en las cuatro fracciones es $(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}$

$$= \frac{\left[\frac{(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}} \right]^{-1} + \left[\frac{(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}} \right]^{-1}}{\left[\frac{(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}} \right]^{-1} - \left[\frac{(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}} \right]^{-1}}$$

Aplicando propiedades para transformar los exponentes negativos en positivos en cada corchete se obtiene lo siguiente:

$$= \frac{\left[\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}{(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}} \right] + \left[\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}{(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}} \right]}{\left[\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}{(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}} \right] - \left[\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}}{(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}} \right]}$$

Se opera la suma de fracciones en el numerador y el denominador, obteniendo una expresión evidentemente más compleja.

$$= \frac{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] + (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}][(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}]}}{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] - (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}][(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}]}}$$

Continuamos identificando una diferencia de cuadrados en el denominador de ambas fracciones y factorizándola como tal.

$$= \frac{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] + (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{(a-b)^{2/2} - (a+b)^{2/2}}}{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] - (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{(a-b)^{2/2} - (a+b)^{2/2}}}$$

Simplificamos en el denominador de ambas fracciones y notamos que debemos empezar a analizar el numerador.

$$= \frac{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] + (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{(a-b) - (a+b)}}{\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}] - (a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{(a-b) - (a+b)}}$$

Identificamos como factor común $(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}$ en el numerador de las dos fracciones.

$$\frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2} + (a-b)^{1/2} + (a+b)^{1/2}]}{a-b-a-b} = \frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[(a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2} - (a-b)^{1/2} - (a+b)^{1/2}]}{a-b-a-b}$$

Se opera dentro de los corchetes en cada numerador y reducimos términos semejantes para obtener una expresión más sencilla, en la cual los denominadores son iguales.

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[2(a-b)^{1/2}]}{-2b} \\ &= \frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[-2(a+b)^{1/2}]}{-2b} \\ &= \frac{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[2(a-b)^{1/2}](-2b)}{(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}[-2(a+b)^{1/2}](-2b)} \end{aligned}$$

Eliminamos términos comunes del numerador y denominador $(a+b)^{1/2}(a-b)^{1/2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{(a+b)^{1/2}}\cancel{(a-b)^{1/2}}[2(a-b)^{1/2}]\cancel{(-2b)}}{\cancel{(a+b)^{1/2}}\cancel{(a-b)^{1/2}}[-2(a+b)^{1/2}]\cancel{(-2b)}} \\ &= \frac{2(a-b)^{1/2}}{-2(a+b)^{1/2}} \\ &= -\frac{(a-b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}} \end{aligned}$$

Para concluir racionalizamos el denominador.

$$\begin{aligned} &= -\frac{(a-b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}} \times \frac{(a+b)^{1/2}}{(a+b)^{1/2}} \\ &= \frac{-(a-b)^{1/2}(a+b)^{1/2}}{(a+b)^{2/2}} \\ &= \frac{-(a-b)^{1/2}(a+b)^{1/2}}{a+b} \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{-(a-b)^{1/2}(a+b)^{1/2}}{a+b}$

7. Simplifique la siguiente expresión

$$= \left[\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (2\sqrt{b})^2}{a - b} - (a^{1/2} - b^{1/2})(a^{1/2} + b^{1/2})^{-1} \right] \div \frac{(4b)^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

Solución:

Empezamos aplicando las reglas de exponentes y productos notables.

$$= \left[\frac{((\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2) - (2^2(\sqrt{b})^2)}{a - b} - \frac{a^{1/2} - b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right] \div \frac{4^{3/2}b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \left[\frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - 4b}{a - b} - \frac{a^{1/2} - b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right] \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \left[\frac{a + 2a^{1/2}b^{1/2} - 3b}{a - b} - \frac{a^{1/2} - b^{1/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right] \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

Por la jerarquía de operación asociada con los corchetes restamos las fracciones que contienen; simplificando la expresión.

$$= \left[\frac{(a + 2a^{1/2}b^{1/2} - 3b)(a^{1/2} + b^{1/2}) - (a^{1/2} - b^{1/2})(a - b)}{(a - b)(a^{1/2} + b^{1/2})} \right] \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \frac{a^{3/2} - 3a^{1/2}b + 2ab^{1/2} + ab^{1/2} - 3b^{3/2} + 2a^{1/2}b - a^{3/2} + ab^{1/2} + a^{1/2}b - b^{3/2}}{(a - b)(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \frac{\cancel{a^{3/2}} - 3\cancel{a^{1/2}b} + 3ab^{1/2} - 3b^{3/2} + 2\cancel{a^{1/2}b} - \cancel{a^{3/2}} + ab^{1/2} + \cancel{a^{1/2}b} - b^{3/2}}{(a - b)(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \frac{4ab^{1/2} - 4b^{3/2}}{(a - b)(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

Luego de reducir términos semejantes se identifica el factor común en la primera fracción y se eliminan términos comunes.

$$= \frac{4b^{1/2}(a - b)}{(a - b)(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$= \frac{4b^{1/2}\cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)}(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

$$\frac{4b^{1/2}}{(a^{1/2} + b^{1/2})} \div \frac{8b^{3/2}}{a^{1/2} + b^{1/2}}$$

Dividiendo las fracciones se obtiene:

$$= \frac{4b^{1/2}(a^{1/2} + b^{1/2})}{(8b^{3/2})(a^{1/2} + b^{1/2})}$$

Las reducciones finales se muestran a continuación

$$\begin{aligned} &= \frac{4b^{1/2}(\cancel{a^{1/2} + b^{1/2}})}{(8b^{3/2})(\cancel{a^{1/2} + b^{1/2}})} \\ &= \frac{1}{2} * b^{1/2-3/2} \\ &= \frac{1}{2} * b^{-2/2} \\ &= \frac{1}{2} * b^{-1} \\ &= \frac{1}{2b} \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{1}{2b}$

.....

8. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{(a-b^2)\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt{-8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}} \times \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}$$

Solución:

Al observar la expresión, determinamos que necesitamos combinar propiedades de radicación, portenciación, factorización y operaciones con fracciones algebraicas. Para empezar a simplificar aplicamos las reglas de exponentes y productos notables.

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b^2 - \sqrt{3}b(-2b)}{\sqrt{2(a^2 - 2ab^2 + b^4) + 4b^2(2a)}} \times \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{2c}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}} \\ &= \frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b^2 + 2\sqrt{3}b^2}{\sqrt{2a^2 - 4ab^2 + 2b^4 + 8ab^2}} \times \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{2c}}{\frac{\sqrt{3}\sqrt{c} - \sqrt{3}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{c}}} \end{aligned}$$

Continuamos reduciendo en ambas fracciones:

$$= \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}b^2}{\sqrt{2a^2 + 4ab^2 + 2b^4}} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{\sqrt{3}(\sqrt{c} - \sqrt{a})} * \sqrt{a}\sqrt{c}$$

Factorizando en la primera fracción y agrupando en la segunda se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}(a+b^2)}{\sqrt{2}(a^2+2ab^2+b^4)} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} \right) * \sqrt{a}\sqrt{c} \\
 &= \frac{\sqrt{3}(a+b^2)}{\sqrt{2}(a+b^2)^2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} \right) * \sqrt{a}\sqrt{c}
 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}(a+b^2)}{\sqrt{2}(a+b^2)} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} \right) * \sqrt{a}\sqrt{c} \\
 &= \frac{\cancel{\sqrt{3}}(a+b^2)}{\cancel{\sqrt{2}}(a+b^2)} \times \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{3}}} \left(-\frac{\cancel{\sqrt{a}}-\cancel{\sqrt{c}}}{\cancel{\sqrt{a}}-\cancel{\sqrt{c}}} \right) * \sqrt{a}\sqrt{c} \\
 &= -\sqrt{a}\sqrt{c}
 \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $-\sqrt{a}\sqrt{c}$

.....

9.Simplifique la siguiente expresión

$$(p^{1/2} + q^{1/2})^{-2}(p^{-1} + q^{-1}) + \frac{2}{(p^{1/2} + q^{1/2})^3}(p^{-1/2} + q^{-1/2})$$

Solución:

El ejercicio planteado requiere el trabajo con exponentes negativos y fraccionarios, potencias de un binomio y operaciones con fracciones. Para simplificar la expresión aplicamos las leyes de exponentes negativos. 9.Simplifique la siguiente expresión

$$= \left(\frac{1}{(p^{1/2} + q^{1/2})^2} \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{2}{(p^{1/2} + q^{1/2})^3} \left(\frac{1}{p^{1/2}} + \frac{1}{q^{1/2}} \right)$$

Realizamos la suma de fracciones de la primera y segunda expresión.

$$= \left(\frac{1}{(p^{1/2} + q^{1/2})^2} \right) \left(\frac{q+p}{pq} \right) + \frac{2}{(p^{1/2} + q^{1/2})^3} \left(\frac{q^{1/2} + p^{1/2}}{p^{1/2}q^{1/2}} \right)$$

Realizamos los productos indicados y se identifica una suma de fracciones de las cuales simplificamos la segunda.

$$= \frac{p+q}{pq(p^{1/2} + q^{1/2})^2} + \frac{2(p^{1/2} + q^{1/2})}{(p^{1/2}q^{1/2})(p^{1/2} + q^{1/2})^3}$$

$$= \frac{p+q}{pq(p^{1/2}+q^{1/2})^2} + \frac{2}{(p^{1/2}q^{1/2})(p^{1/2}+q^{1/2})^2}$$

Identificamos que el denominador común es $p^{1/2}+q^{1/2})^2$ y procedemos a sumar las fracciones; a partir de ello se obtiene:

$$= \frac{(p+q) + 2p^{1/2}q^{1/2}}{pq(p^{1/2}+q^{1/2})^2}$$

Desarrollando los productos notables y simplificando, tenemos:

$$= \frac{p+q+2p^{1/2}q^{1/2}}{pq(p^{2/2}+2p^{1/2}q^{1/2}+q^{2/2})}$$

$$= \frac{p+q+2p^{1/2}q^{1/2}}{pq(p+2p^{1/2}q^{1/2}+q)}$$

Si observamos con detenimiento, notamos que el numerador coincide con uno de los factores del denominador.

$$= \frac{\cancel{p} + \cancel{q} + 2\cancel{p^{1/2}}\cancel{q^{1/2}}}{pq(\cancel{p} + 2\cancel{p^{1/2}}\cancel{q^{1/2}} + \cancel{q})}$$

$$= \frac{1}{pq}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $\frac{1}{pq}$

.....

10. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{(1-x^2)^{-1/2} + 1}{(1+x)^{-1/2} + (1-x)^{1/2}} \div \frac{\sqrt{1-x}}{x-2}$$

Solución:

Notamos que la expresión contiene términos con exponentes fraccionarios y otros representados por radicales por lo que se opta por trabajar con exponentes fraccionarios. Para simplificar la expresión se aplican las leyes de exponentes

$$= \frac{\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + 1}{\frac{1}{(1+x)^{1/2}} + (1-x)^{1/2}} \div \frac{(1+x)^{1/2}}{x-2}$$

Se realizan las sumas de fracciones correspondientes, en el numerador y denominador de la primera fracción.

$$= \frac{\frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{(1 - x^2)^{1/2}}}{\frac{1 + 1 - x}{(1 + x)^{1/2}}} \div \frac{(1 + x)^{1/2}}{x - 2}$$

Dividiendo y simplificando la expresión del lado izquierdo, obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}(1 - x^2)^{1/2}}{(2 - x)(1 + x)^{1/2}} \div \frac{(1 + x)^{1/2}}{x - 2} \\ &= \frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}\cancel{(1 - x^2)^{1/2}}}{(2 - x)\cancel{(1 + x)^{1/2}}} \div \frac{(1 + x)^{1/2}}{x - 2} \\ &= \frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{2 - x} \div \frac{(1 + x)^{1/2}}{x - 2} \end{aligned}$$

Ahora, podemos efectuar la división de fracciones. Para identificar el denominador común escribimos $(2 - x) = -(x - 2)$ y ccambiamos el signo de la fracción.

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 + (1 - x^2)^{1/2})(x - 2)}{(2 - x)(1 + x)^{1/2}} \\ &= -\frac{(1 + (1 - x^2)^{1/2})(x - 2)}{(x - 2)(1 + x)^{1/2}} \end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes, obtenemos:

$$\begin{aligned} &= -\frac{(1 + (1 - x^2)^{1/2})\cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}(1 + x)^{1/2}} \\ &= -\frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{(1 + x)^{1/2}} \end{aligned}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es: $-\frac{1 + (1 - x^2)^{1/2}}{(1 + x)^{1/2}}$

8.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

Simplifique las expresiones dadas.

1. $(a^{1/3} - 4)^2$ **R**/ $a^{2/3} - 8a^{1/3} + 16$
2. $\frac{(a^{3/2} * b^{1/4})^6}{(a^{3/4} * b^{5/8})^8}$ **R**/ $\frac{a^3}{b^{7/2}}$
3. $\frac{(x^{-1} * y^3 * z^{-2})^{-3}}{(x^4 * y^{-3} * z^{-3})^{-2}}$ **R**/ $\frac{x^{11}}{y^{15}}$
4. $\frac{3x^{-1} - 6x^{-2}}{1 - 4x^{-2}}$ **R**/ $\frac{3}{x + 2}$
5. $\frac{2a^{-2} - 3b^{-3}}{2a^{-2} + b^{-2}}$ **R**/ $\frac{2b^3 - 3a^2}{b(a^2 + 2b^2)}$
6. $\left(x - \frac{x^3}{1 + x^2}\right)^{-1/2} * \left(\frac{x^2 \sqrt{(1 + x^2)^{-1}} - \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}\right)$ **R**/ $-\frac{1}{x^{1/2}(1 + x^2)}$
7. $\left[(a - b) * \sqrt{\frac{a + b}{a - b}} + a - b\right] \left[(a - b) \left(\sqrt{\frac{a + b}{a - b}} - 1\right)\right]$ **R**/ $(a - b)2b$
8. $\left[\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3} - 2x^{-1/3}} - \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} - x^{1/3}}\right]^{-1} - \left(\frac{1 - 2x}{3x - 2}\right)^{-1}$ **R**/ $\frac{x^2}{2x - 1}$
9. $\frac{1}{a^{1/4} + a^{1/8} + 1} + \frac{1}{a^{1/4} - a^{1/8} + 1} - \frac{2a^{1/4} - 2}{a^{1/2} - a^{1/4} + 2}$ **R**/ $\frac{2(a^{1/4} + 6)}{a + 2a^{1/2} + a^{1/4} + 2}$
10. $\left[\frac{1}{(a^{1/2} + b^{1/2})^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{3/2} - b^{3/2}}\right)^{-1}\right] * (ab)^{-1/2}$ **R**/1



9. Problemas de Aplicación algebraicos

El estudio de la relación entre la variación de diversas magnitudes, es muy importante en las asignaturas de matemática. Se entiende por *magnitud*, aquello que resulta de un conteo o medición. La comparación de dos magnitudes se conoce como *razón*, que en este caso se refiere a una comparación realizada por medio de un cociente y se representa por una fracción, ésta se denomina como *razón geométrica*.

Una *proporción* se forma al comparar dos razones mediante la igualdad, es decir, para formar una proporción se igualan dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. La expresión anterior significa que el resultado de comparar por medio de un cociente las magnitudes a y b , es el mismo que el que se obtiene al comparar las magnitudes c y d , también por medio de un cociente.

Se dice que dos magnitudes son *directamente proporcionales*, si al incrementar o disminuir el valor de una de ellas, la otra experimenta también un incremento o disminución. Las magnitudes *inversamente proporcionales*, son aquellas cuya variación es inversa, es decir, si una incrementa la otra disminuye y viceversa.

Algunas situaciones para ejemplificar la proporcionalidad directa son:

- La cantidad de pintura disponible y el área a pintar: si la cantidad de pintura disponible se incrementa el área que se puede pintar es mayor, mientras que, si se dispone de menos pintura, el área que se puede pintar es menor.
- El número de páginas de un documento y el costo de fotocopiarlo: si la cantidad de páginas de un documento aumenta, el costo también lo hace; mientras que si el número de páginas disminuye, el costo será menor.

Para ejemplificar la proporcionalidad inversa, se describen las siguientes situaciones:

- Dada cierta cantidad de dinero que se reparte entre un grupo de personas, si son más personas, a cada una le corresponde menos; por el contrario, si son menos personas a cada una le corresponde más.
- La cantidad de personas que realizan un trabajo y el tiempo que se tardan: si se incrementa

el número de personas, el tiempo es menor; mientras que si son menos las personas que trabajan, el tiempo se incrementa.

■ Regla de tres simple y compuesta

Al establecer una proporción entre dos razones, de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se involucran cuatro magnitudes, si de ellas se conocen tres y se desconoce una, el planteamiento se conoce como *regla de tres*. Para resolverlo, se utilizan las propiedades de la igualdad de fracciones, representando por x la magnitud desconocida. Es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si sólo si $a d = b c$.

Si la cantidad desconocida corresponde a uno de los numeradores, su valor puede calcularse de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{x}{d} \text{ entonces } ad = bx \text{ por lo que } x = \frac{a d}{b} \\ \frac{x}{b} &= \frac{c}{d} \text{ entonces } xd = bc \text{ por lo que } x = \frac{b c}{d} \end{aligned}$$

Para el caso en que la cantidad desconocida se encuentre en uno de los denominadores, su valor se calcula así:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{c}{d} \text{ entonces } ad = cx \text{ por lo que } x = \frac{a d}{c} \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{x} \text{ entonces } ax = bc \text{ por lo que } x = \frac{b c}{a} \end{aligned}$$

Dado que la proporcionalidad entre magnitudes puede ser directa o inversa, su solución se conoce como regla tres directa o inversa, según el caso. Si se forma una sola proporción para comparar las magnitudes involucradas, se le llama *regla de tres simple*, mientras que, si involucra varias proporciones, se denomina *regla de tres compuesta*.

En el trabajo operativo con proporciones, se pueden plantear y trabajar con otras equivalentes sin que esto cambie los resultados, por ejemplo $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = cx$, a partir de esto se puede reescribir $\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$ o bien $\frac{d}{x} = \frac{c}{a}$; de cualquier forma el valor de la magnitud desconocida se calcula multiplicando los valores conocidos *cruzados* y dividiendo entre el valor conocido opuesto, así:

$$x = \frac{a d}{c}.$$

A continuación, se ejemplifican los procedimientos de planteo y cálculo que involucran las situaciones que se resuelven por medio de reglas de tres simples y compuestas.

- a) Un archivo musical de cinco minutos se graba en formato MP 3 y ocupa un espacio de 3.51MB. Determinar el espacio requerido para almacenar 70 archivos de las mismas características.

La relación planteada es:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ archivo} \dots\dots\dots 3.51 \text{ MB} \\ 70 \text{ archivos} \dots\dots\dots x \text{ MB} \end{array}$$

Se determina que al incrementar la cantidad de archivos que se graban, se necesita más espacio, por lo cual la proporcionalidad es directa y puede plantearse así:

$$\frac{1}{70} = \frac{3.51}{x} \text{ entonces } 1(x) = 3.51(70) \text{ por lo que } x = \frac{3.51(70)}{1} = 245.7$$

El espacio requerido para grabar 70 archivos musicales MP3 de 5 minutos de duración cada uno, es de 245.7 MB.

- b) Una fundación para la ayuda humanitaria recibe donativos anuales de 75,000 personas, quienes aportan una cuota de Q 2,400.00. Por dificultades económicas, 800 donantes retiraron sus aportes y se requiere realizar un ajuste a las cuotas de los donantes. ¿En cuánto hay que incrementar la cuota de los donantes restantes, para mantener los ingresos de la fundación? (Aproximar a enteros)

La situación planteada es:

$$\begin{array}{l} 2,400 \text{ cuota anual} \dots\dots\dots 75,000 \text{ donantes} \\ x \text{ cuota anual} \dots\dots\dots 74,200 \text{ donantes} \end{array}$$

Se determina que si hay menos donantes, la cuota anual se incrementa, por lo que la proporcionalidad es inversa. En este caso, se plantea la proporción.

$$\frac{x}{2,400} = \frac{75,000}{74,200} \text{ entonces } 74,200x = 75,000(2,400) \text{ por lo que } x = \frac{75,000(2,400)}{74,200} = Q 2,425.88$$

Como la cuota inicial era de Q 2,400.00, el incremento es de Q 2,425.88 – Q 2,400.00, que se aproxima a Q26.00.

- c) Una empresa de publicidad en redes sociales asigna 6 trabajadores para diseñar una campaña que deben entregar en 10 días, trabajando 8 horas diarias, pero al cabo de 6 días se detecta un avance de 3/8 del trabajo, por lo que se contratan 6 empleados más, pero se disminuye la jornada a 6 horas diarias. ¿Cuántos días se retrasará la entrega del trabajo?

La situación implica la realización de varias comparaciones, por lo que se organiza la información dada:

$$\begin{array}{l} 6 \text{ trabajadores} \dots 10 \text{ días} \dots 8 \text{ horas diarias} \dots 3/8 \text{ del trabajo} \\ 12 \text{ trabajadores} \dots x \text{ días} \dots 6 \text{ horas diarias} \dots 5/8 \text{ del trabajo} \end{array}$$

Se compara cada razón con la que contiene la cantidad desconocida para determinar si la proporcionalidad es directa o inversa:

- Tiempo 10 días si trabajan 6 personas, si aumentan los trabajadores disminuye el tiempo. **Proporcionalidad inversa.**
- Tiempo de 10 días con jornada de 8 horas diarias, si el tiempo de trabajo diario es menor entonces se requieren más días. **Proporcionalidad inversa.**
- Tiempo de 10 días y se realizan 3/8 del trabajo, si se incrementa el trabajo a 5/8 se requieren más días. **Proporcionalidad directa.**

Una regla práctica que permite representar estas variaciones conjuntas es colocando una flecha a la razón que contiene a la cantidad desconocida, luego del análisis se colocan flechas en el mismo sentido en las razones con proporcionalidad directa y flechas en sentido contrario si es inversa:

6 trabajadores $\uparrow$ 10 días $\downarrow$ 8 horas diarias $\uparrow$ $3/8$ del trabajo $\downarrow$
 12 trabajadores $\uparrow$ x 6 horas diarias $\uparrow$ $5/8$ del trabajo $\downarrow$

Para realizar cálculos se coloca la razón que contiene la incógnita de un lado de la igualdad, mientras que en el otro se multiplican las razones restantes, las cuales se forman siguiendo el sentido de las flechas:

$$\frac{10}{x} = \frac{12}{6} \times \frac{6}{8} \times \frac{3/8}{5/8}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{36}{40} \text{ entonces } x = 400/36 = 11.11$$

De los 10 días del plazo original transcurrieron 6 antes de contratar más personal, o sea que faltaban 4 días. Si en la segunda fase se emplean aproximadamente 11 días, entonces la entrega del trabajo se retrasará 7 días.

■ Reparto proporcional

Las situaciones de reparto proporcional involucran reglas de tres directas e inversas, bajo el concepto que se busca repartir una cantidad **N** en partes proporcionales a **X, Y, Z**. Si a cantidades mayores les corresponden partes mayores, se dice que el reparto es directamente proporcional; si por el contrario a cantidades mayores les corresponde partes menores, el reparto es inverso.

Un ejemplo del primer caso es que se reparte una herencia entre dos personas y a la de mayor edad corresponde mayor cantidad mientras que a la de menor edad le corresponde menos.

A la vez, si la herencia se reparte entre un niño y un adulto de tal manera que al niño le toque más y al adulto menos, entonces el reparto es inversamente proporcional.

Por ejemplo, se reparte Q3,000.00 entre tres hermanos X, Y, Z, de tal manera que por cada parte que reciba X, Y recibe el doble y Z recibe el triple. Se determina en cuantas partes se divide el total:

1 parte de X, 2 partes para Y y 3 partes para Z, o sea 6 partes. Una razón es: $\frac{3000}{6}$.

Sea: *a* la parte que le corresponde a X, *b* la que corresponde a Y, *c* la que le corresponde a Z.

Así, se forman las proporciones siguientes:

$$\frac{3000}{6} = \frac{a}{1} * \frac{3000}{6} = \frac{b}{2} * \frac{3000}{6} = \frac{c}{3}$$

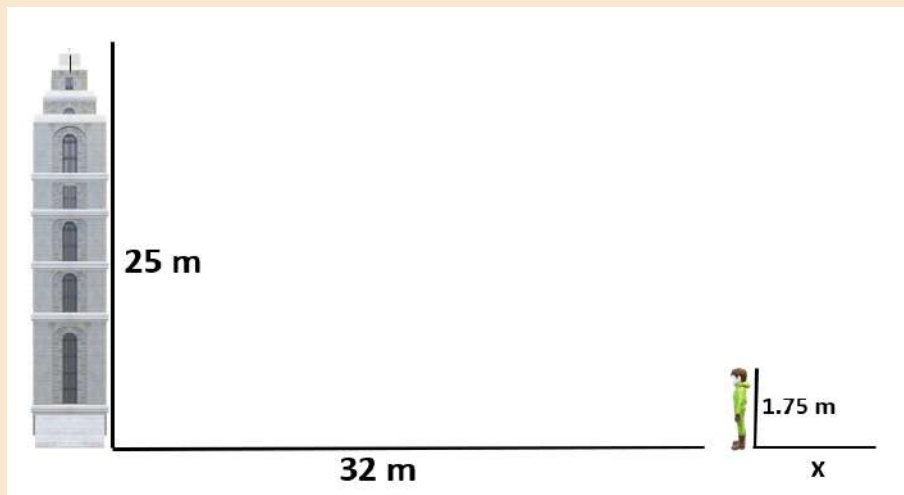
$$a = 500, b = 1,000 \text{ y } c = 1,500$$

9.1 Ejercicios resueltos

1. Un edificio de 25 metros de altura proyecta una sombra de 32 metros de longitud. Determine la longitud de la sombra que proyecta a la misma hora, un hombre de 1.75 metros altura.

Solución:

Para resolver el problema realizaremos un esquema de la situación.



Las magnitudes son directamente proporcionales ya que al considerar menor altura, la longitud de la sombra disminuye.

La altura del edificio es de 25m y su sombra es de 32 metros. La altura del hombre es de 1.75 metros, llamaremos a la longitud de su sombra x .

Tendremos entonces las siguientes relaciones:

Si la altura es 25m $\longrightarrow$ sombra 32m

Si la altura es 1.75m $\longrightarrow$ sombra x

Esto puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{25}{1.75} = \frac{32}{x}$$

$$x = \frac{1.75 \times 32}{25} = 2.24$$

Respuesta:

La longitud de la sombra del hombre es de 2.24 metros.

2. Si se conoce que $\frac{2}{5}$ de la capacidad de un depósito equivalen a 700 litros. Determine la capacidad de $\frac{3}{8}$ del depósito.

Solución:

Al comparar $\frac{2}{5}$ con $\frac{3}{8}$ para determinar cuál de ellos es mayor se plantea lo siguiente:

$$\frac{2}{5} > \frac{3}{8} \text{ si y solo si } 2 \times 8 > 3 \times 5$$

$$16 > 15$$

Así, $\frac{3}{8}$ del depósito tendrán menor capacidad que $\frac{2}{5}$ del mismo. Entonces, la proporcionalidad es directa. Tendremos la siguiente relación:

$$\frac{2}{5} \rightarrow 700 \text{ litros como } \frac{3}{8} \rightarrow x$$

Es decir:

$$\frac{2/5}{3/8} = \frac{700}{x}$$

$$x = \frac{700 \times 3/8}{2/5} = 656.25$$

Respuesta:

La capacidad de $\frac{3}{8}$ del depósito es de 656.25 litros.

.....

3. Un profesional factura servicios por Q.8, 000.00. Dicho monto incluye el 12 % de IVA. Si debe pagar 5 % de sus ingresos como impuestos extras, determine cuánto paga en total de impuestos.

Solución:

Para poder calcular los impuestos extras primero definiremos lo siguiente:

$$8000 \rightarrow 112 \%$$

$$x \rightarrow 12 \%$$

La proporcionalidad es directa pues a un porcentaje menor, corresponde una cantidad menor. Ahora calculamos cuánto se paga de IVA:

$$\frac{8000}{x} = \frac{112 \%}{12 \%}$$

$$x = \frac{8000 \times 12}{112} = 857.14$$

Luego de pagar el impuesto del 12 %, los ingresos del profesional equivalen a $8000 - 857.14 = 7142.86$. Para el impuesto del 5 %, esta cantidad se considera el 100 %.

Las relaciones las podemos representar así:

$$\begin{array}{l} 7142.86 \longrightarrow 100\% \\ x \longrightarrow 5\% \end{array}$$

Podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{aligned} \frac{7142.86}{x} &= \frac{100\%}{5\%} \\ x &= \frac{5 \times 7142.86}{100} = 357.14 \end{aligned}$$

En total, los impuestos ascienden a:

$$Q.857.14 + Q.357.14 = Q.1214.28$$

Nótese que si de forma errónea se calculan los impuestos sumados sobre el total se tendrá que el 17 % de 8000 es Q1,360.00

Respuesta:

El profesional debe pagar Q. 1, 214.38 de impuestos.

.....

4. Una empresa de viajes cobra Q.500.00 por persona si el grupo es de 10 y disminuye para grupos mayores. Determine el pago por persona si un grupo de turistas está formado por 14 personas.

Solución:

Como el costo disminuye al incrementar la cantidad de personas, se trata de magnitudes inversamente proporcionales. Tendremos entonces la siguiente relación:

$$\begin{array}{l} 10 \text{ personas} \longrightarrow Q500.00 \text{ cada una} \\ 14 \text{ personas} \longrightarrow x \text{ cada una} \end{array}$$

Reescribiendo la relación, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{10}{14} &= \frac{x}{500} \\ x &= \frac{10 \times 500}{14} = 357.14 \end{aligned}$$

Respuesta:

Si viajan 14 personas cada una debe pagar Q357.14

.....

5. Cinco trabajadores pintan un edificio en 9 días. ¿En cuánto tiempo lo pintarán 7 trabajadores?

Solución:

Si se incrementa el número de trabajadores, se tardarán menos tiempo, por lo que las magnitudes son inversamente proporcionales. La relación será la siguiente:

5 trabajadores $\longrightarrow$ 9 días
 7 trabajadores $\longrightarrow$ x días

La proporción inversa es:

$$\frac{5}{7} = \frac{x}{9}$$

$$x = \frac{5 \times 9}{7} = 6.43$$

Respuesta:

Al aumentar el número de trabajadores a 7, el tiempo que se tardan en pintar el edificio es de 6.43 días.

.....

6. Un equipo de 3 digitadores de datos puede realizar un proceso de imágenes satelitales en 16 días, pero los contratantes requieren que lo realicen en 6 días menos. Determine cuántas personas deben agregar al equipo para cumplir con el plazo establecido

Solución:

El equipo de tres personas puede realizar el trabajo en 16 días, pero se requiere realizarlo en 10 días. si el tiempo es menor se requieren más personas, por lo que la proporcionalidad es inversa. La relación será la siguiente:

3 digitadores $\longrightarrow$ 16 días
 x trabajadores $\longrightarrow$ 10 días

La proporción inversa se plantea así:

$$\frac{x}{3} = \frac{16}{10}$$

$$x = \frac{3 \times 16}{10} = 4.8$$

Como se trata de personas, el equipo debe ser de 5 personas. Dado que lo conforman 3 digitadores, deben contratarse 2 más para cumplir con el plazo. Para verificarlo se puede plantear lo siguiente

3 digitadores $\longrightarrow$ 16 días
 5 trabajadores $\longrightarrow$ x días

La proporción en este caso es:

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{16}$$

$$x = \frac{3 \times 16}{5} = 9.6 \approx 10$$

Respuesta:

Deben agregarse 2 personas al equipo para cumplir con el plazo.

.....

7. Cincuenta encuestadores disponen de 20 días para censar un poblado de difícil acceso y viviendas dispersas, si cada uno visita 3 casas diarias, por la temporada de lluvias se estima que las casas diarias que pueden censarse disminuyen en $\frac{1}{3}$, por lo que se unen al equipo 10 encuestadores más. Determine cuánto tiempo tardarán en censar el poblado.

Solución:

Al inicio la situación era la siguiente:

50 encuestadores $\longrightarrow$ 20 días $\longrightarrow$ 3 casas diarias

Se aumenta la cantidad de encuestadores en 10 con lo que se tiene un total de 60 encuestadores.

Las casas diarias censadas disminuyen en $\frac{1}{3}$, es decir en $\frac{1}{3}$ de 3, lo cual es igual a 1 casa.

Las proporcionalidades planteadas son:

Proporcionalidad inversa:
 50 encuestadores $\longrightarrow$ 20 días
 60 encuestadores $\longrightarrow$ x días

Y

Proporcionalidad inversa:
 3 casas diarias $\longrightarrow$ 20 días
 2 casas diarias $\longrightarrow$ x días

Ahora se plantean de forma conjunta

$\downarrow$ 50 encuestadores $\longrightarrow$ 20 días $\uparrow \longrightarrow$ 3 casas diarias $\downarrow$
 $\downarrow$ 60 encuestadores $\longrightarrow$ x días $\uparrow \longrightarrow$ 2 casas diarias $\downarrow$

Se coloca una flecha $\uparrow$ en la razón donde está la cantidad desconocida (x). En los otros casos se colocan flechas con sentido contrario $\downarrow$, para indicar que la proporcionalidad es inversa.

$$\frac{50}{60} \times \frac{3}{2} = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{20 \times 50 \times 3}{60 \times 2} = 25$$

Respuesta:

Al aumentar el número de encuestadores se tardarían 25 días en censar todo el poblado.

8. Una empresa debe entregar un pedido en 24 días y asigna 10 empleados para la producción, que trabajan 8 horas diarias. Cuando se ha trabajado 6 días en esas condiciones, los clientes requieren la entrega 8 días antes del plazo acordado, por lo que la gerencia asigna más personas e incrementa los turnos a 12 horas diarias con lo que logran entregar el pedido. Determine cuantos trabajadores se agregaron al equipo.

Solución:

Al inicio, el plazo era de 24 días, de los cuáles se trabajaron 6 días, es decir $\frac{1}{4}$ del tiempo. Se deduce que en 6 días se realizó $\frac{1}{4}$ del trabajo, por lo que en las nuevas condiciones, se realizaría los $\frac{3}{4}$ restantes del trabajo de producción.

Además, de los 24 días, se disminuyeron 8 días, por lo que el nuevo plazo fue de 16 días, de los cuales habían transcurrido 6, así que para realizar $\frac{3}{4}$ del trabajo disponían de 10 días.

Se plantean las siguientes proporciones, asignando una flecha $\uparrow$ a la razón donde aparece la cantidad desconocida y se agregan flechas en el mismo sentido si la proporcionalidad es directa o bien, en sentido contrario $\downarrow$ si es inversa.

$$\begin{array}{l} \uparrow 10 \text{ personas} \longrightarrow 6 \text{ días} \downarrow \longrightarrow 8 \text{ horas diarias} \downarrow \longrightarrow \frac{1}{4} \text{ del trabajo} \uparrow \\ \uparrow x \text{ personas} \longrightarrow 10 \text{ días} \downarrow \longrightarrow 12 \text{ horas diarias} \downarrow \longrightarrow \frac{3}{4} \text{ del trabajo} \uparrow \end{array}$$

En caso de ser necesario se analiza por separado:

$$\begin{array}{l} 10 \text{ personas} \longrightarrow 6 \text{ días} \\ x \text{ personas} \longrightarrow 10 \text{ días} \end{array}$$

Si aumenta el número de días, el número de personas disminuye, entonces la proporcionalidad es inversa.

$$\begin{array}{l} 10 \text{ personas} \longrightarrow 8 \text{ horas diarias} \\ x \text{ personas} \longrightarrow 12 \text{ horas diarias} \end{array}$$

Si el tiempo de trabajo diario aumenta, se requieren menos trabajadores, por lo que la proporcionalidad es inversa.

$$\begin{array}{l} 10 \text{ personas} \longrightarrow \frac{1}{4} \text{ del trabajo} \\ x \text{ personas} \longrightarrow \frac{3}{4} \text{ del trabajo} \end{array}$$

Si la fracción del trabajo aumenta se requieren más personas, por lo que se tiene una proporcionalidad directa.

La proporcionalidad compuesta es:

$$\begin{array}{l} \frac{x}{10} = \frac{6}{10} \times \frac{8}{12} \times \frac{3/4}{1/4} \\ \frac{x}{10} = \frac{6 \times 8 \times 3/4}{10 \times 12 \times 1/4} \end{array}$$

$$x = \frac{10 \times 6 \times 8 \times 3/4}{10 \times 12 \times 1/4} = 12$$

Dado que inicialmente había 10 trabajadores, se agregaron $12 - 10 = 2$ personas al equipo de producción de la empresa.

Respuesta:

Se agregaron dos personas al equipo de producción para cumplir con el plazo.

.....

9. Se reparten Q.900.00 entre Carlos, Marta y Alejandro de manera que a Marta le toca el doble que a Carlos, mientras que a Alejandro le corresponde el triple que a Marta. Determine qué cantidad recibe cada uno.

Solución:

Se divide 900 entre 3 personas, de tal manera que:

- Carlos: 1 parte
- Marta: 2 partes, pues indica que es el doble de lo que recibe Carlos.
- Alejandro: 6 partes pues equivale al triple de lo que le dan a Marta.

Así, Q900 se dividen en $1 + 2 + 6 = 9$ partes iguales.

A Carlos le toca 1 de 9 partes iguales de Q900

$$\frac{x}{900} = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{900}{9} = 100$$

A Marta le corresponden 2 de 9 partes iguales de Q900

$$\frac{x}{900} = \frac{2}{9}$$

$$x = \frac{900 \times 2}{9} = 200$$

Alejandro recibe 6 de 9 partes iguales de Q900

$$\frac{x}{900} = \frac{6}{9}$$

$$x = \frac{900 \times 6}{9} = 600$$

El reparto proporcional realizado es:

- Carlos: Q100.00
- Marta: Q.200.00
- Alejandro: Q.600.00

Respuesta:

El dinero se repartió de la siguiente manera: Q100 para Carlos, Q200 para Marta y Q600 para Alejandro.

.....

10. Se reparten 238 pelotitas entre 4 niños en partes inversamente proporcionales a sus edades que son 2, 5, 6 y 8 años. Determine cuantas pelotitas le tocan a cada niño.

Solución:

El reparto es inversamente proporcional, lo que significa que a los de menor edad les corresponden más, o bien, que a los mayores les dan menos, por lo que se consideran los números inversos a las

edades: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$

Al escribirlos como fracciones equivalente del mismo denominador (120), determinamos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{24}{120}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{20}{120}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{15}{120}$$

Así, 238 se dividirá en $60 + 24 + 20 + 15 = 119$ partes iguales de la siguiente forma.

- Niño de 2 años

$$\frac{x}{238} = \frac{60}{119}$$

$$x = \frac{60 \times 238}{119} = 120$$

- Niño de 5 años

$$\frac{x}{238} = \frac{24}{119}$$

$$x = \frac{24 \times 238}{119} = 48$$

- Niño de 6 años

$$\frac{x}{238} = \frac{20}{119}$$

$$x = \frac{20 \times 238}{119} = 40$$

- Niño de 8 años

$$\frac{x}{238} = \frac{15}{119}$$

$$x = \frac{15 \times 238}{119} = 30$$

El reparto proporcional realizado es:

- Niño de 2 años: 120
- Niño de 5 años: 48
- Niño de 6 años: 40
- Niño de 8 años: 30

Respuesta:

Los niños reciben del menor al mayor, 120, 48, 40 y 30 pelotitas respectivamente.

.....

9.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Determine lo siguiente:
 - a) ¿Qué porcentaje de 2020 es 58? **R/ Es el 2.8 %**
 - b) ¿De qué número, 276 es el 8 % menos? **R/ 300**
2. Si la capacidad de $\frac{6}{7}$ de una pecera es 15 galones, determine cuántos galones corresponden a $\frac{5}{6}$ de la pecera.
R/ $\frac{5}{6}$ de la capacidad corresponden a 14.6 galones.
3. Determinar el porcentaje de ganancia que obtiene una empresa que vende en Q. 1, 200.00, artículos que compra en Q780.00
R/ La empresa obtiene un 53.85 % de ganancias.
4. Un automovilista viaja de una ciudad a otra en 3 horas. ¿Cuánto tiempo se tardará otro automovilista en realizar el mismo recorrido si en promedio se mueve a un 80 % de la velocidad del primer conductor?
R/El segundo automovilista se tardará 3 horas y 45 minutos.
5. Tres máquinas automáticas colocan etiquetas durante 8 horas a un lote de botellas de bebidas carbonatadas. Si se agregan dos máquinas de las mismas características, ¿cuánto tiempo disminuirá el proceso?
R/ El tiempo del proceso se reduce en 3.2 horas.
6. Una persona pagará un préstamo en 12 cuotas de Q1, 500.00 cada una. Si incrementa su pago mensual en un 20 %,¿cuántas cuotas pagará?
R/ Pagará 10 cuotas.
7. Una empresa de servicios de TV por cable envía 10 empleados para realizar instalaciones durante 20 días. Luego de 5 días de trabajo durante 8 horas diarias, reducen en 4 días el plazo inicial, por lo que se reduce la jornada laboral a 6 horas y se aumenta el número de trabajadores para cumplir con el plazo. ¿Cuántos trabajadores se agregaron al equipo?
R/ Se agregaron 8 personas al equipo de trabajo.

8. Una compañía constructora asigna 6 hombres durante 9 días, trabajando a razón de 8 horas diarias, al final de los cuales la evaluación determina que se han realizado $\frac{3}{8}$ del trabajo. Si se refuerza el equipo con 4 hombres más y trabajan 6 horas diarias, ¿en cuántos días terminarán la construcción?

R/ Se tardarán 12 días más en terminar la obra.

9. Se reparten 24 marcadores en partes proporcionales a las edades de 3 niños de 2, 4 y 6 años de edad. Determine cuántos le tocan a cada uno.

R/ Le tocan de menor a mayor, 4, 8 y 12 marcadores, respectivamente.

10. Se reparten 118 globos entre 3 niños de 5, 6 y 8 años, en forma inversamente proporcional a su edad. Determine cuántos recibe cada niño.

R/ Cada niño recibe del menor al mayor, 48, 40 y 30 globos, respectivamente.

Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.