



Facultad de Ingeniería

Universidad de San Carlos de Guatemala

Administración 2019-2023



Unidad de Modelación Matemática e Investigación
Facultad de Ingeniería -USAC-

Prepárate para estudiar Ingeniería

Fascículo V: Trigonometría

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería **Fascículo V: Trigonometría**

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Enero de 2022

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Ángulos y sus medidas	9
2.1	Ejercicios resueltos	11
2.2	Ejercicios para la autoevaluación	15
3	Razones trigonométricas y el círculo unitario	17
3.1	Ejercicios resueltos	21
3.2	Ejercicios para la autoevaluación	28
4	Funciones trigonométricas	31
4.1	Ejercicios resueltos	37
4.2	Ejercicios para la autoevaluación:	44
5	Trigonometría del triángulo rectángulo	47
5.1	Ejercicios resueltos	51
5.2	Ejercicios para la autoevaluación	58
6	Ley de senos	61
6.1	Ejercicios resueltos	62
6.2	Ejercicios para la autoevaluación	69
7	Ley de cosenos	71
7.1	Ejercicios resueltos	73

7.2	Ejercicios para la autoevaluación	78
	Bibliografía	81



1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

***Prepárate para estudiar Ingeniería.
Fascículo V: Trigonometría***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

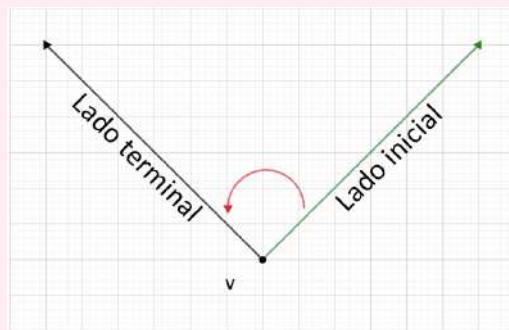
Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

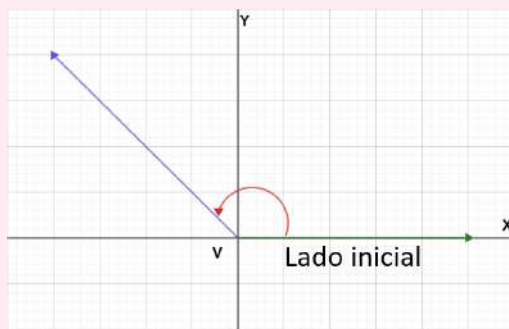
Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala

2. Ángulos y sus medidas

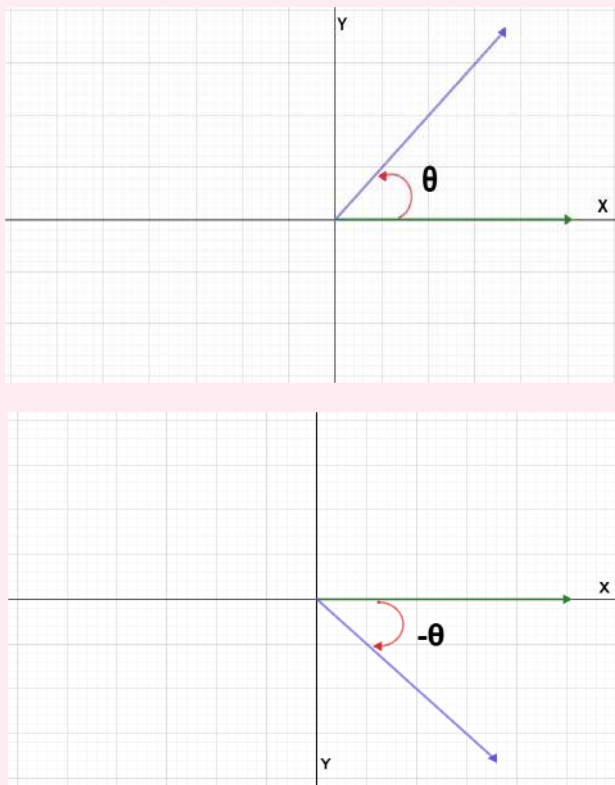
El concepto de ángulo se estudia en geometría pero también es la base para estudiar trigonometría. Si se consideran dos segmentos de recta con un punto común, al rotar un segmento con respecto al otro, se genera una región del plano a la que se llama **ángulo**. Los segmentos de recta se llaman **lado inicial** y **lado terminal**, y el punto común se llama vértice.



La idea de generar un ángulo por medio de una rotación, permite situarlo en el plano cartesiano. En particular, si el vértice coincide con el origen del plano y el lado inicial se ubica sobre la parte positiva del eje X, se dice que el ángulo está en **posición estándar** o **normal**, como se ilustra en la figura.

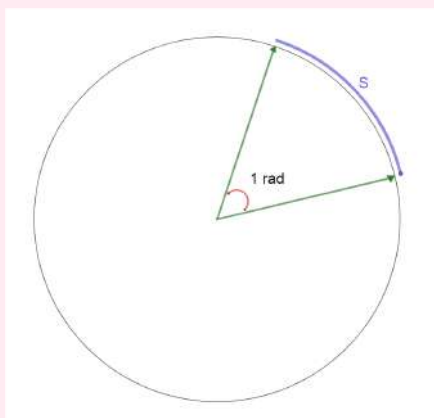


Es muy usual representar ángulos con letras griegas: α , β , θ , δ , ϕ y otros. Además, si la rotación para generar un ángulo se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo es positivo; en caso contrario, se dice que es negativo.



En la mayoría de aplicaciones prácticas, los ángulos se miden en **grados sexagesimales**; en este sistema una rotación completa equivale a 360° . Derivado de esto, un ángulo recto mide 90° y equivale a $\frac{1}{4}$ de vuelta, 180° corresponde a $\frac{1}{2}$ de vuelta y así sucesivamente.

Las medidas de ángulos en vueltas o revoluciones se aplican mucho en el contexto de situaciones de movimiento. Otro sistema de medidas de ángulos es por radianes, en el cual 1 vuelta = 2π radianes = 360° , conviene recordar la definición de un radián (S). Para ello se traza una circunferencia de radio r , se trazan dos radios de tal manera que la longitud del arco sobre la circunferencia, mida lo mismo que el radio. El ángulo formado mide 1 radián.

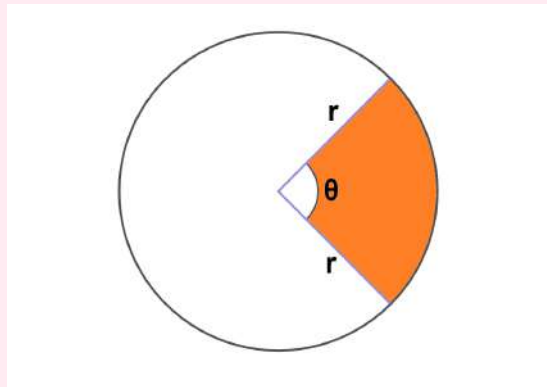


¿ A cuántos grados equivale un radián?

Este concepto permite calcular la longitud de arco para cualquier ángulo θ medido en radianes, como $s = r\theta$.

A veces se requiere calcular el área de un sector circular de radio r , generado por un ángulo θ , medido en radianes, la expresión para ello es:

$$A = \frac{r^2\theta}{2}$$



2.1 Ejercicios resueltos

1. Convertir los ángulos dados en grados a radianes.

- a) 120°
- b) -45°
- c) 420°

Solución:

Para expresar un ángulo en radianes podemos utilizar varios factores de conversión: por ejemplo 360° equivalen a 2π radianes o bien, 180° equivalen a π radianes.

- a) $120^\circ * \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$
- b) $-45^\circ * \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- c) $420^\circ * \frac{\pi \text{ rad}}{180} = \frac{42}{18}\pi = \frac{7}{3}\pi \text{ rad}$

2. Convertir los ángulos dados en radianes a grados.

- a) $\frac{11}{6}\pi$
- b) $-\frac{3}{4}\pi$
- c) $\frac{16}{3}\pi$

Solución:

Para resolver este ejercicio usaremos el factor de conversión dado por: $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{11}{6}\pi * \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1980}{6} = 330^\circ \\ \text{b)} \quad & -\frac{3}{4}\pi * \frac{180^\circ}{\pi} = -\frac{540}{4} = -135^\circ \\ \text{c)} \quad & -\frac{16}{3}\pi * \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{2880}{3} = 960^\circ \end{aligned}$$

3. El período de rotación de la Tierra es de aproximadamente 24 horas. Determinar:

- El ángulo medido en grados que indica su recorrido a las 15 horas en Guatemala.
- En el momento que el ángulo de su rotación es de $\frac{4}{7}\pi$, ¿cuántas horas faltan para completar su rotación?

Solución:

- En este caso debemos suponer que la rotación se realiza con una rapidez constante, entonces si en 24 horas rota 360° , se requiere calcular la medida del ángulo x que ha rotado en 15 horas.

Planteamos:

$$\begin{aligned} \frac{24}{360} &= \frac{15}{x} \\ x &= \frac{15 * 360}{24} = 225 \end{aligned}$$

R/ A las 15 horas (Guatemala) el ángulo de rotación de la Tierra es de 225° .

- En este caso tenemos que, t : tiempo en rotar $\frac{4\pi}{7}$. Podemos plantear:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{24} &= \frac{\frac{4\pi}{7}}{t} \\ t &= \frac{\frac{4}{7}\pi * 24}{2\pi} = 6.86h \end{aligned}$$

Para completar la rotación faltan:

$$24 - 6.86 = 17.14h$$

R/ Faltan 17.14 horas para que termine la rotación.

Este problema también se puede resolver usando un factor de conversión $\frac{24h}{360^\circ}$ o $\frac{360^\circ}{24h}$

$$\text{a)} \quad 15h * \frac{360^\circ}{24h} = 225^\circ$$

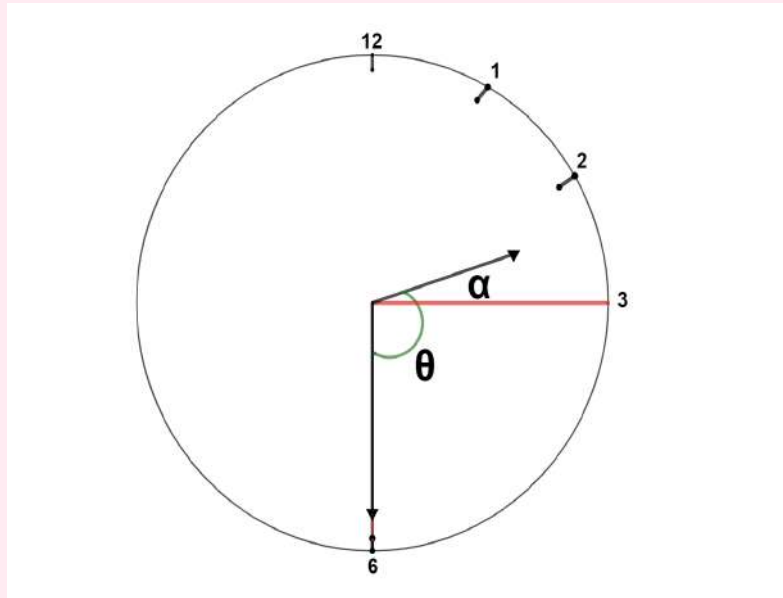
$$b) \frac{4}{7}\pi * \frac{24h}{2\pi} = 6.86h$$

¿Cuál método te parece mejor?

.....

4. El minuterero de un reloj mide 8 centímetros de largo. Determinar:

- La distancia recorrida por la punta en un cuarto de hora.
- El ángulo entre la manecilla de las horas y el minuterero, a la hora que indica la figura.



Solución:

- Los relojes de agujas o manecillas, muestran 12 horas y 60 minutos distribuidas en un círculo, esto significa que entre dos marcas de hora consecutivas hay un ángulo de 30° .

Así, el minuterero recorre $\frac{360^\circ}{60} = 6$ grados por minuto.

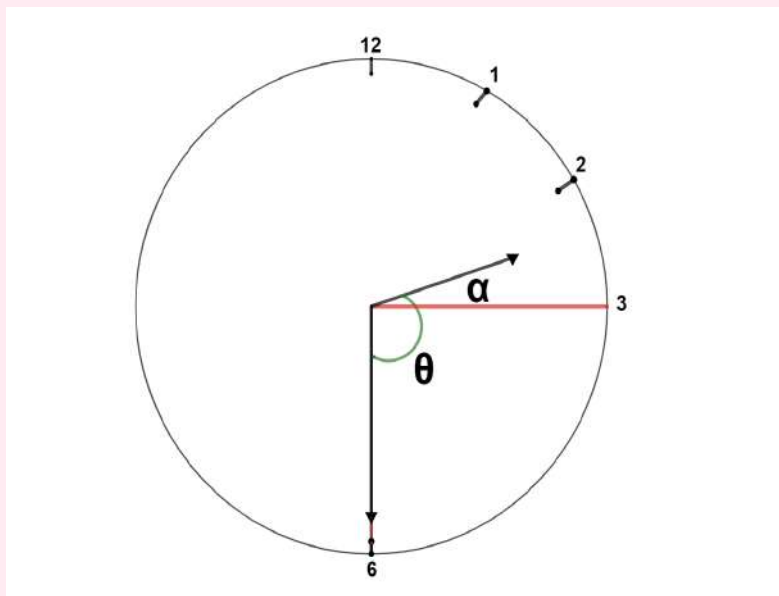
$\frac{1}{4}$ de hora equivale a 15 minutos, entonces el ángulo recorrido es $\theta = 6(15) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

La distancia recorrida por el minuterero corresponde a la longitud del arco dada por:

$$s = r\theta$$

$$s = 8 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \cong 0.785 \text{ cm}$$

- En la siguiente figura podemos ver que el reloj marca las 2:30. Representamos por θ el ángulo entre las manecillas. Este ángulo se puede expresar como la suma de un ángulo recto y un ángulo agudo α .



El ángulo agudo corresponde a la rotación de la manecilla de las horas, equivalente a media hora.

Entonces, si en 1 hora recorre 30° , en media hora recorre $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Por lo que $\theta = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$

Respuestas:

- a) La manecilla minuterá recorre 0.785 centímetros.
- b) El ángulo entre las manecillas es de 105° .

-
5. Como proyecto de emprendimiento, un grupo de estudiantes de ingeniería quieren diseñar un aspersor que cubra un campo de $100m^2$. Si el campo tiene la forma de un sector circular con un radio de 15 metros, determinar el ángulo que debe girar el aspersor.

Solución:

Sabemos que el área de un sector circular generado por la rotación con un ángulo θ en radianes, está dada por:

$$A = \frac{r^2\theta}{2}$$

Despejando θ obtenemos:

$$2A = r^2\theta$$

$$\frac{2A}{r^2} = \theta$$

Sustituimos los valores dados para el área y el radio

$$\theta = \frac{2(100)}{15^2}$$

$$\theta = 0.89 \text{ radianes}$$

Convertimos este ángulo al sistema de grados aplicando el factor de conversión $180^\circ = \pi$ rad.

$$\theta = 0.89 \text{ rad} * \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 50.99^\circ \cong 51^\circ$$

Respuesta:

El ángulo que gira el aspersor es de 51° .

.....

2.2 Ejercicios para la autoevaluación

- Convertir los ángulos dados en grados a radianes.

- 30° **R/** $\frac{\pi}{6}$
- -60° **R/** $-\frac{\pi}{3}$
- 540° **R/** 3π

- Convertir a grados los ángulos dados en radianes.

- $\frac{7}{5}\pi$ **R/** 252°
- $-\frac{4}{9}\pi$ **R/** -80°
- $\frac{3}{10}\pi$ **R/** 54°

- Se ha estimado que la duración de un día en Júpiter es de aproximadamente 10 horas terrestres. Determinar.

- El ángulo medido en grados cuando Júpiter ha rotado un ángulo de $\frac{3}{5}$ de vuelta.
R/El ángulo es de 216°
- ¿En cuántas horas terrestres Júpiter rota un ángulo de $\frac{10}{7}\pi$ radianes.
R/Se tarda 7.14 horas en rotar el ángulo indicado.

- El diámetro de las llantas de una bicicleta es de 66cm. Si el ciclista se mueve a 25 km/h determinar: ¿a cuántas revoluciones por minuto giran las llantas?

R/Las llantas giran a 201.3 rpm

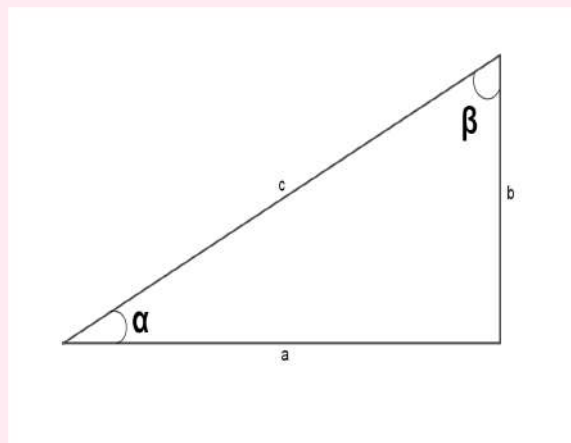
- Un aspersor riega agua hasta una distancia de 25 pies al girar un ángulo de 150° . ¿Qué área del terreno recibe agua?

R/El área que recibe agua es de 818.12 p^2

3. Razones trigonométricas y el círculo unitario

La trigonometría se basa en el estudio de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, esto es: entre los catetos y la hipotenusa, relacionándolos con los ángulos agudos internos.

En la figura se muestra un triángulo rectángulo para que podamos identificar seis razones; dos corresponden a comparar los catetos con la hipotenusa (seno y coseno), dos comparan los catetos entre sí (tangente y cotangente), mientras que otras dos razones comparan la hipotenusa con cada y uno de los catetos (secante y cosecante).



Para el caso del ángulo α , estas razones se definen como:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

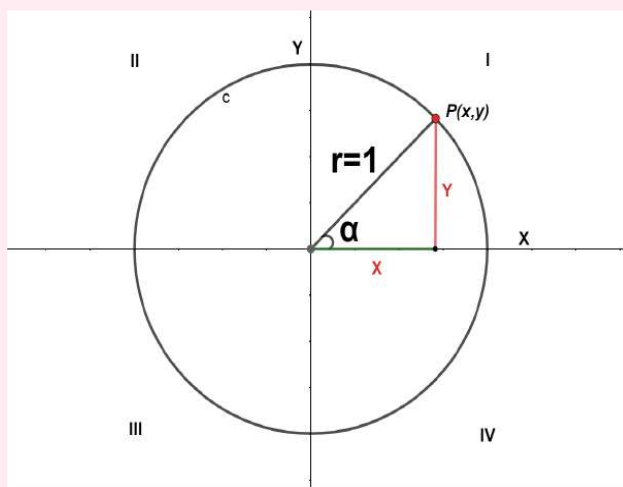
$$\cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

Se sugiere expresar las razones trigonométricas para el ángulo β .

El **círculo unitario**, también llamado **círculo trigonométrico**, es una herramienta valiosa para entender el estudio de las razones trigonométricas. Este círculo tiene centro en el origen del plano cartesiano y su radio mide una unidad, es decir $r = 1$. Así, cualquier triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud 1 puede colocarse con su vértice en el origen, su lado unicial sobre el eje X positivo y el lado terminal en uno de los cuatro cuadrantes.



Así:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{x}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{y}$$

Algunas relaciones importantes que surgen a partir de lo anterior son:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0$$

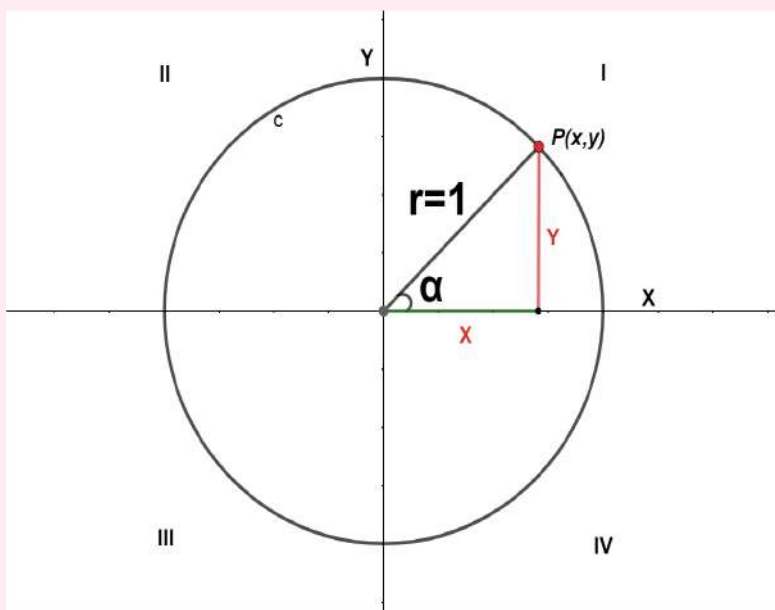
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0$$

Notemos que al utilizar el círculo trigonométrico, podemos formar triángulos rectángulos en los cuatro cuadrantes de tal manera que medir el seno de un ángulo sea equivalente a medir la ordenada de un punto en la circunferencia, mientras que medir el coseno equivale a medir la abscisa. Así, las razones trigonométricas de ángulos de 0 a 360° pueden variar de signo.

Como el triángulo es rectángulo, es posible aplicar el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = r^2 = 1$, al sustituir $x = \cos \alpha$ y $y = \sin \alpha$, obtenemos: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Esta expresión fundamental se conoce como Identidad Pitagórica.

Para los ángulos en el primer cuadrante, $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ó $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, todas las razones son positivas ya que los valores de x y y son positivos.



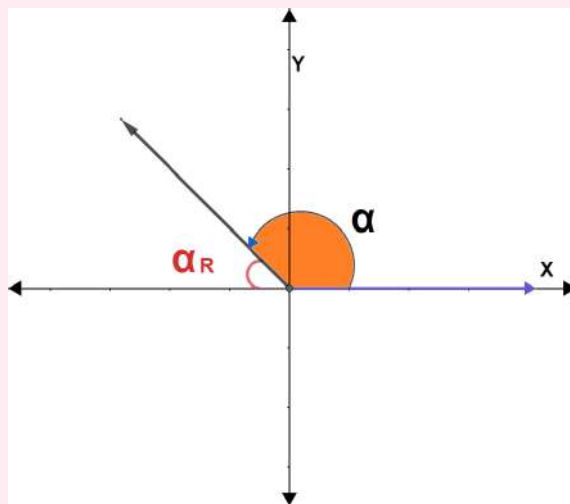
Al analizar las razones trigonométricas para ángulos mayores a 90° , se aplica el concepto siguiente:

Ángulo de referencia: ángulo agudo positivo formado entre su lado terminal y el eje X, para representar un ángulo en cualquier cuadrante.

Cuadrante	Positivas	Negativas
I	Todas	
II	Seno, cosecante	Coseno, tangente, secante, cotangente
III	Tangente, cotangente	Seno, coseno, cosecante, secante.
IV	Coseno, secante	Seno, tnagente, cosecante, cotangente

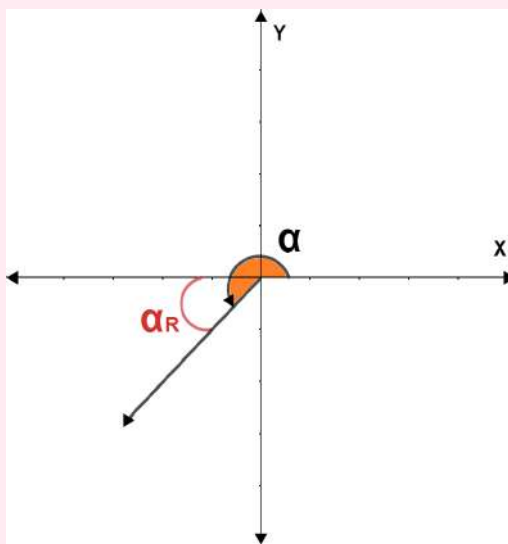
$$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$

$$\alpha_R = 180^\circ - \alpha$$



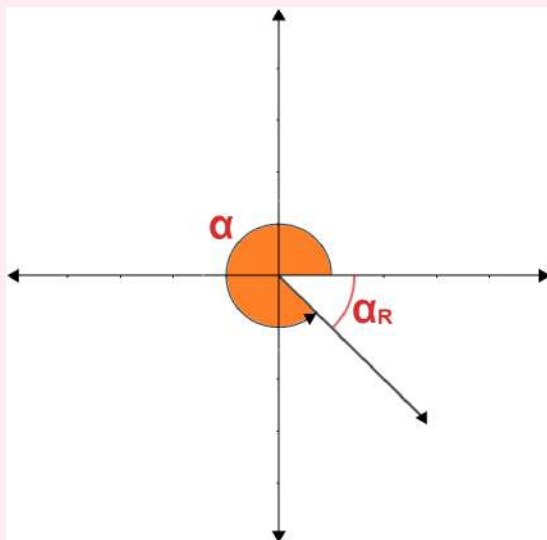
$$180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$$

$$\alpha_R = 180^\circ + \alpha$$



$$270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$$

$$\alpha_R = 360^\circ - \alpha$$

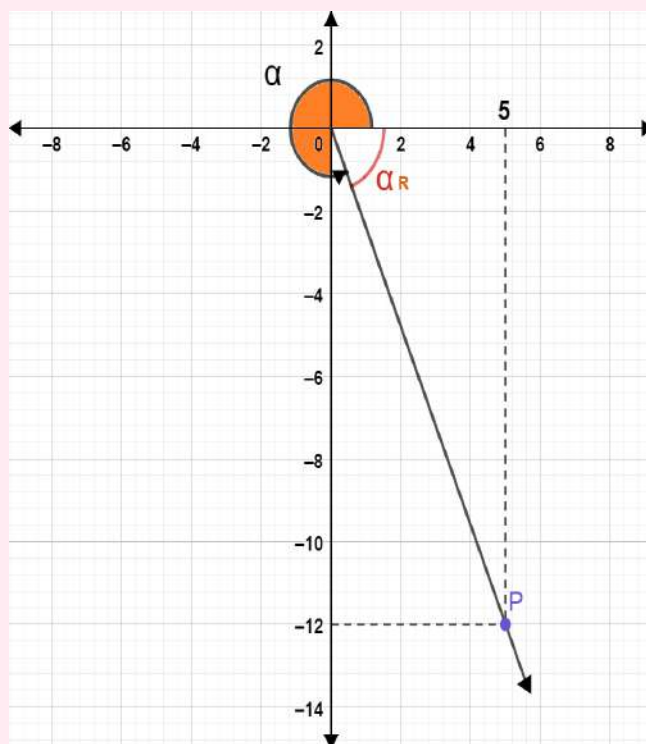


3.1 Ejercicios resueltos

1. Determinar el valor de las seis razones trigonométricas de un ángulo en posición estándar, si se conoce que el punto $P(5, -12)$ se ubica en el lado terminal.

Solución:

Ubicamos el punto P en el plano cartesiano y trazamos el lado terminal para visualizar el ángulo dado, se ubica en el cuarto cuadrante.



Para determinar las razones trigonométricas de α usamos el ángulo de referencia, para el que calculamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 5^2 + 12^2 \text{ entonces } h = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Las razones trigonométricas son entonces:

$$\begin{array}{lll} \sin \alpha = -\frac{12}{13} & \cos \alpha = \frac{5}{13} & \tan \alpha = -\frac{5}{12} \\ \cot \alpha = -\frac{12}{5} & \sec \alpha = \frac{13}{5} & \csc \alpha = -\frac{13}{12} \end{array}$$

.....

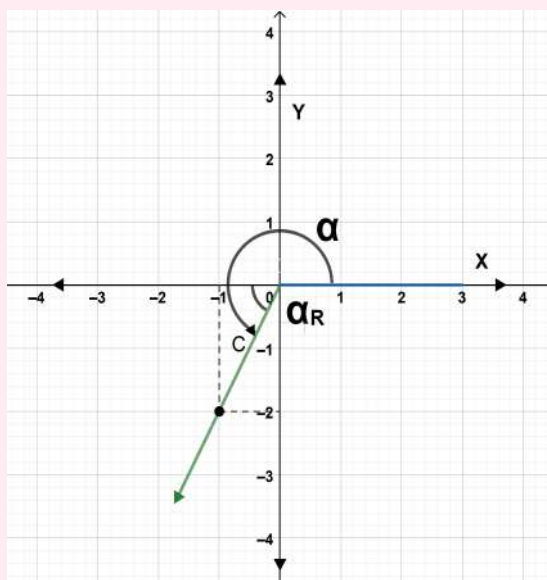
2. Si se sabe que $\sin \alpha < 0$ y $\tan \alpha = 2$ determinar los valores de las razones trigonométricas restantes.

Solución:

Para los ángulos en posición estándar se determinó que el valor de la razón seno es negativo, en el III y en IV cuadrantes, ya que allí el eje Y es negativo.

Sabemos que $\tan \alpha = 2$, que es mayor que cero, como $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ y $\sin \alpha < 0$ entonces el coseno del ángulo debe ser negativo.

Así determinamos que el lado terminal se ubica en el tercer cuadrante, como se muestra en la figura.



$$\tan \alpha = \frac{-2}{-1} = 2. \text{ Cateto opuesto mide 2 unidades y el adyacente mide 1.}$$

Para encontrar la hipotenusa aplicamos el Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$c = \sqrt{5}$$

Las razones trigonométricas restantes serán entonces:

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{10} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$$

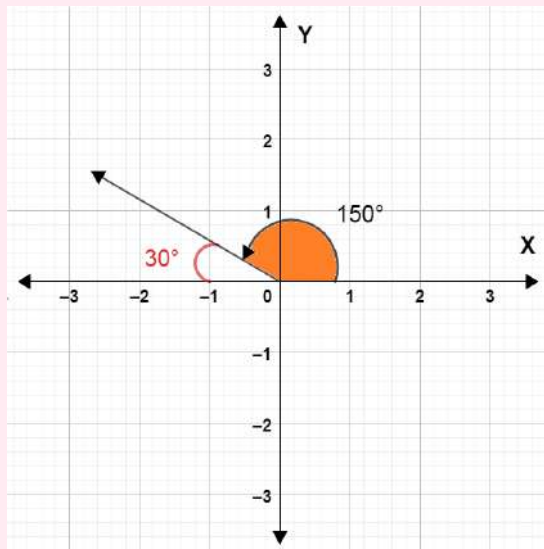
3. Si $a = 150^\circ$, $b = \pi$, $c = 45^\circ$ y $d = 225^\circ$. Verificar que:

$$\frac{\sin a + \cos b}{\tan^2 c - \cos d} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

Solución:

150° es un ángulo en el IV cuadrante, que podemos estudiar por medio de un ángulo de referencia:

$$150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

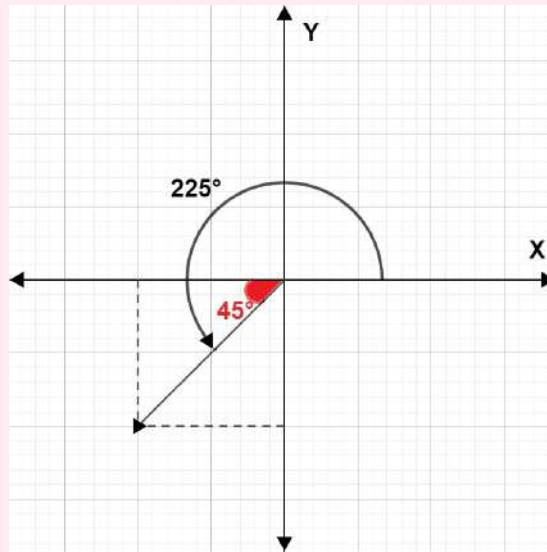


$$\cos \pi = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

Ahora bien, el ángulo de 225° tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, con $\cos \alpha < 0$,

$$\text{por lo que } \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Sustituyendo los valores calculados en la expresión dada obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin a + \cos b}{\tan^2 c - \cos d} &= \frac{\sin 150^\circ + \cos \pi}{\tan^2 45^\circ - \cos 225^\circ} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + (-1)}{1^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2 + \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

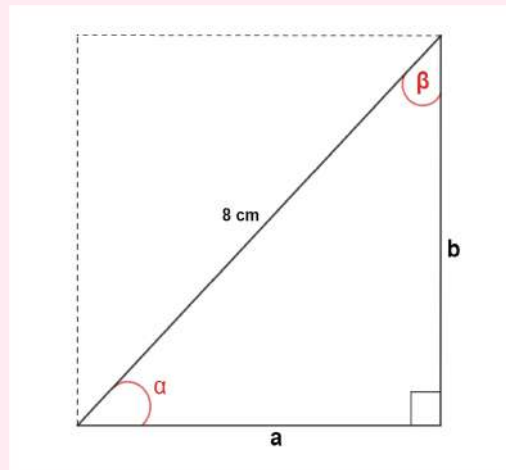
Racionalizamos el denominador y verificamos:

$$\frac{\sin a + \cos b}{\tan^2 c - \cos d} = -\frac{1}{2 + \sqrt{2}} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

.....

4. Dado un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 8, como el que se muestra en la figura, determinar:

- La longitud de los catetos
- El valor de $2 \cos^2 \beta - 5 \sin \alpha - 1$

**Solución:**

- a) Como el triángulo rectángulo es isósceles, tenemos que $a = b$, además $\alpha = \beta$. Para calcular a y b , aplicaremos el Teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = 8^2$$

$$a^2 + a^2 = 64$$

$$2a^2 = 64$$

$$a^2 = 32$$

$$a = 4\sqrt{2}$$

Así, los catetos miden aproximadamente 5.66 cm

- b) Sabemos que α y β son complementarios, entonces: $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Evaluamos la expresión dada y obtenemos:

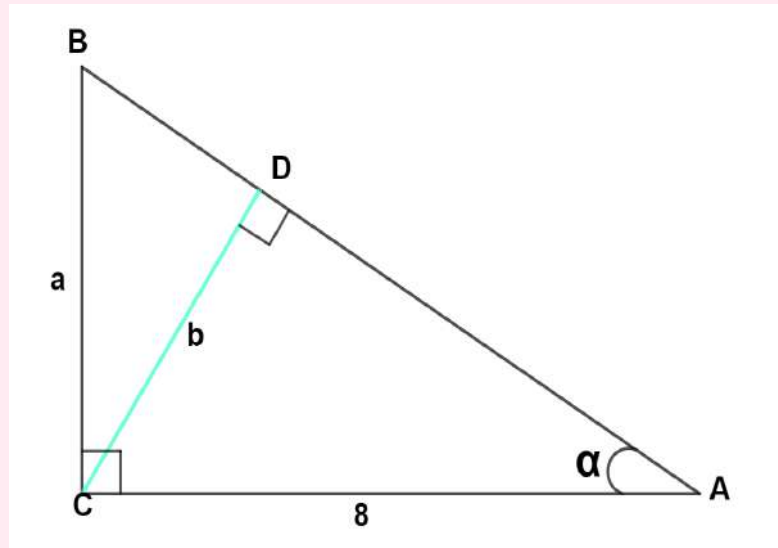
$$\begin{aligned} 2\cos^2 \beta - 5\sin \alpha - 1 &= 2\cos^2 45^\circ - 5\sin 45^\circ - 1 \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 \\ &= 2\left(\frac{2}{4}\right) - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - 1 \\ &= 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ &\approx -3.54 \text{ cm} \end{aligned}$$

Respuestas:

- a) Los catetos a y b miden aproximadamente 5.66 cm cada uno.
b) El valor de la expresión indicada es de aproximadamente 3.54 cm

5. Con base en la figura que se muestra, expresar en términos de α , el área de los siguientes triángulos

- a) $\triangle ABC$
- b) $\triangle ACD$
- c) $\triangle BCD$



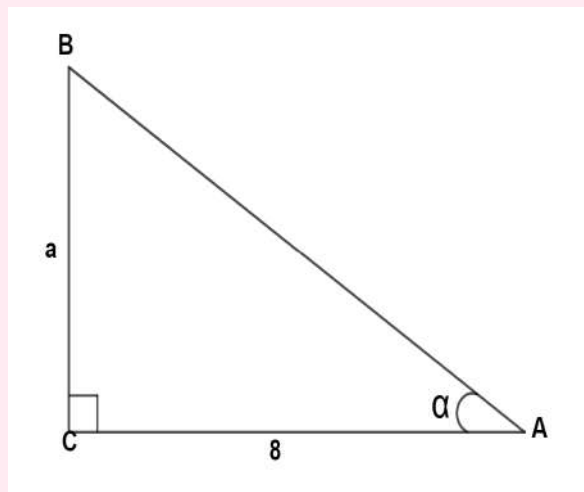
Solución:

Para el área de un triángulo aplicamos la expresión

$$A = \frac{1}{2} b h$$

a) $\triangle ABC$. La altura puede ser el cateto a y $\tan \alpha = \frac{a}{8}$

$$8 \tan \alpha = a$$

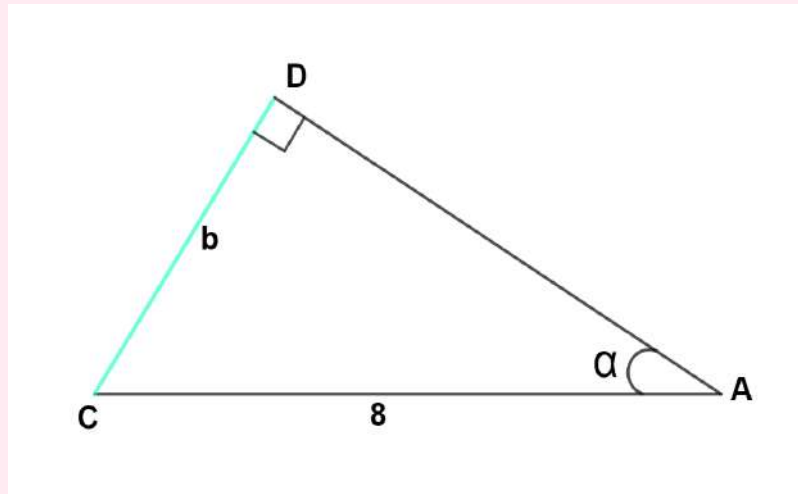


Expresamos el área como:

$$A = \frac{1}{2}(8)(8 \tan \alpha)$$

$$A = 32 \tan \alpha$$

- b) Para obtener una expresión para el área del triángulo $\triangle ACD$, notamos que el segmento b está opuesto al ángulo α , mientras que la hipotenusa mide 8.



Aplicamos la definición de la razón seno:

$$\sin \alpha = \frac{b}{8}$$

$$8 \sin \alpha = b$$

El segmento AD puede identificarse como base y está dada por:

$$\cos \alpha = \frac{AD}{8}$$

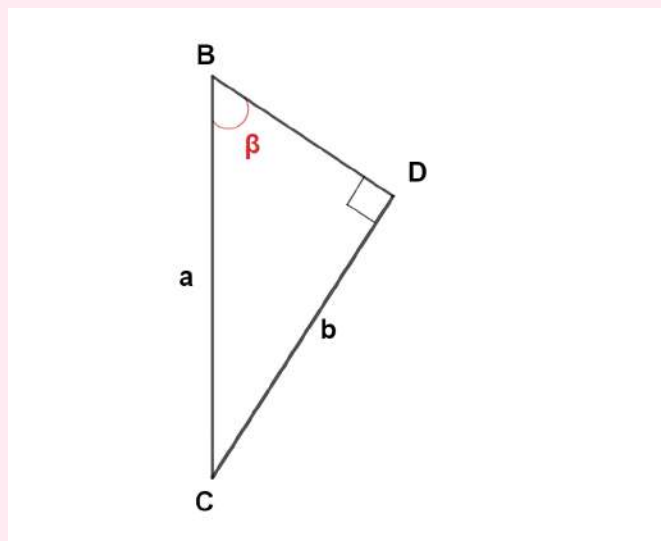
$$AD = 8 \cos \alpha$$

Sustituyendo estas expresiones, determinamos que:

$$A = \frac{1}{2}(8 \cos \alpha)(8 \sin \alpha)$$

$$A = 32 \sin \alpha \cos \alpha$$

- c) Para el caso del triángulo $\triangle BCD$, analizamos la figura que se muestra:



$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$A = \frac{1}{2}(8 \sin \alpha)(BD)$$

Notamos que el segmento BD es el cateto adyacente al ángulo β , por lo que:

$$\cos \beta = \frac{BD}{a}$$

$$a \cos \beta = BD$$

Por otra parte, en la figura original se tiene que α y β son ángulos complementarios, por lo que:

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

Así,

$$BD = a \sin \alpha$$

$$BD = (8 \tan \alpha) \sin \alpha$$

La expresión para el área de $\triangle BCD$ es:

$$A = \frac{1}{2}(8 \sin \alpha)(8 \tan \alpha \sin \alpha)$$

$$A = 32 \sin^2 \alpha \tan \alpha$$

.....

3.2 Ejercicios para la autoevaluación

- Determinar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo α , si al colocarlo en posición estándar el punto $R(-2, 5)$ está en el lado terminal.

Respuestas:

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29} \quad \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29} \quad \tan \alpha = -2.5$$

$$\cot \alpha = -0.40 \quad \csc \alpha = -\frac{\sqrt{29}}{5} \quad \sec \alpha = -\frac{\sqrt{29}}{2}$$

- Determinar las razones trigonométricas para un ángulo α cuyo coseno es negativo y $\csc \alpha = 4$

Respuestas:

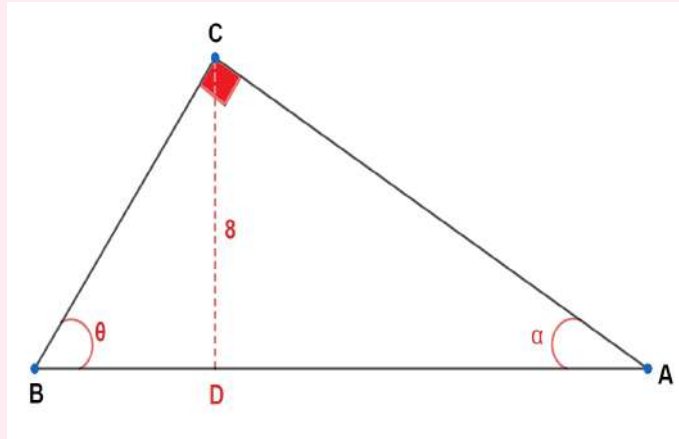
$$\sin \alpha = -\frac{1}{4} \quad \cos \alpha = -\frac{15}{16} \quad \tan \alpha = -\frac{4}{15}$$

$$\cot \alpha = -\frac{17}{4} \quad \sec \alpha = -\frac{\sqrt{16}}{15}$$

- Determinar el valor de $A - B$ si $A = 3 \cot^2 120^\circ * \cos 30^\circ * \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$ y $B = 1 - \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} \right)$

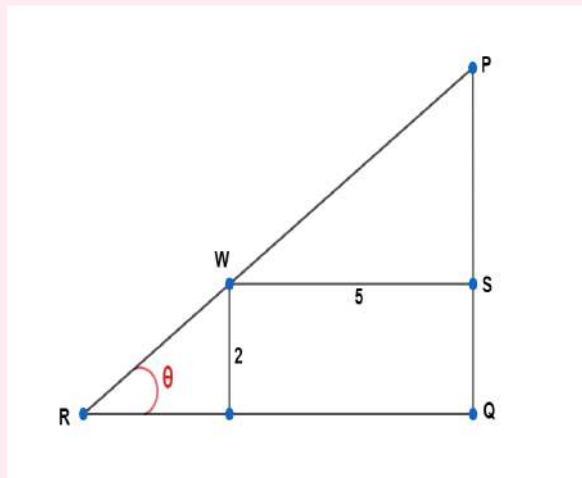
Respuestas: 0

4. Con base en la figura mostrada, determinar una expresión en términos del ángulo θ para:
- El segmento AC
 - El área del $\triangle ACD$



Respuestas: a) $AC = 8 \sec \theta$ b) $\text{Area} = 32 \tan \theta$

5. Dada la figura que se muestra determinar una expresión para el segmento PQ en términos del ángulo θ



Respuesta: $PQ = 5 \tan \theta + 2$

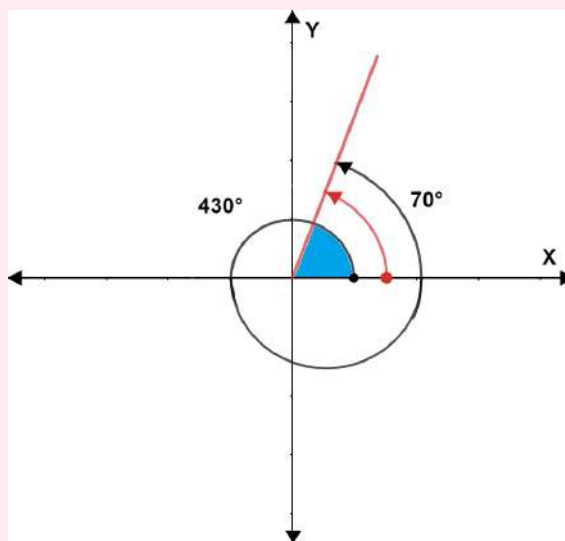
4. Funciones trigonométricas

Para transformar las razones trigonométricas en **funciones trigonométricas**, necesitamos tener presentes algunos aspectos:

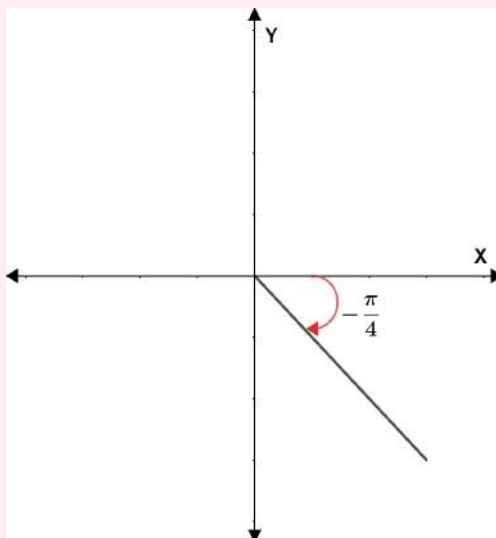
- a) Los ángulos deben representarse como número reales, por ejemplo:

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \cong 1.047 \text{ ó } 90^\circ = \frac{\pi}{2} \cong 1.571$$

- b) Con la ayuda del círculo unitario podemos establecer el signo de las funciones trigonométricas para ángulos en los diferentes cuadrantes.
- c) Los ángulos pueden ser mayores de 360° o 2π . es decir, al completar una vuelta al círculo unitario, los valores empiezan a repetirse, por ejemplo: $430^\circ = 360^\circ + 70^\circ$, por lo que $\sin 430^\circ = \sin 70^\circ$



- d) Lo estudiado en el capítulo de funciones se aplica también en este caso, debemos especificar el dominio, contradominio o rango y, una ley de correspondencia que asigne a cada elemento del dominio una sola imagen en el contradominio.
- e) Los ángulos pueden ser negativos, lo cuál indica que se miden en el sentido contrario a los positivos.



A continuación, se presentan las funciones trigonométricas y algunas de sus representaciones.

Función seno:

$$f(x) = \sin x \qquad f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

Esto significa que el dominio es $\mathbb{R}$ y el contradominio el intervalo $[-1, 1]$.

En la tabla se muestran algunos valores de esta función.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \sin x$	0	0.5	0.707	0.866	1	0	-1	0

La primera vuelta, corresponde a $[0, 2\pi]$ y se conoce como ciclo fundamental, ya que los valores se repiten en cada vuelta. Por eso, su período es 2π :

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

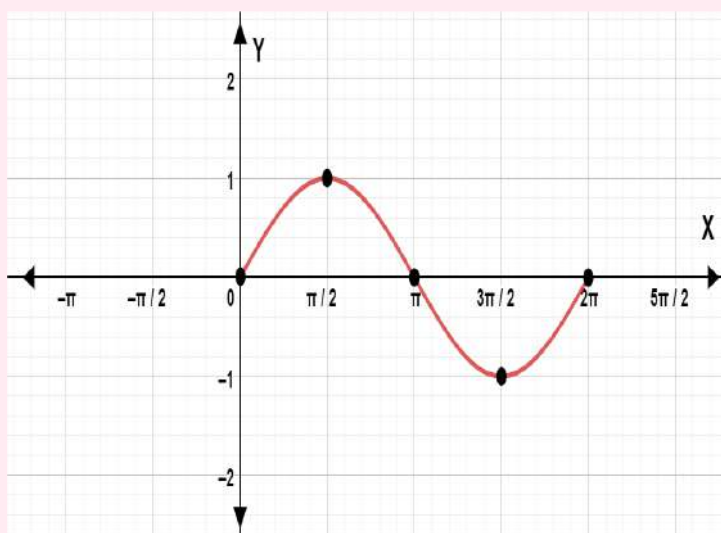
Por ejemplo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{13}{6}\pi\right)$$

o

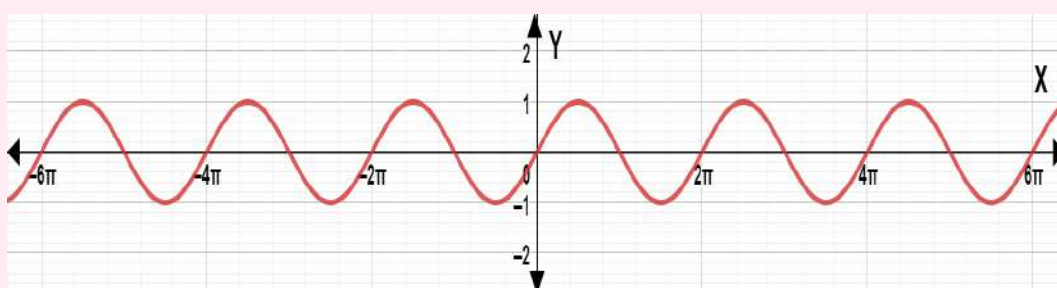
$$\sin 30^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin(390^\circ)$$

A continuación, se muestra el comportamiento gráfico de la función seno en el ciclo básico $[0, 2\pi]$



Notemos que el valor máximo es 1 y el mínimo es -1 . Tiene tres ceros en este ciclo en: $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

La gráfica de la función seno en los números reales replica el comportamiento en el ciclo básico.



Función coseno:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

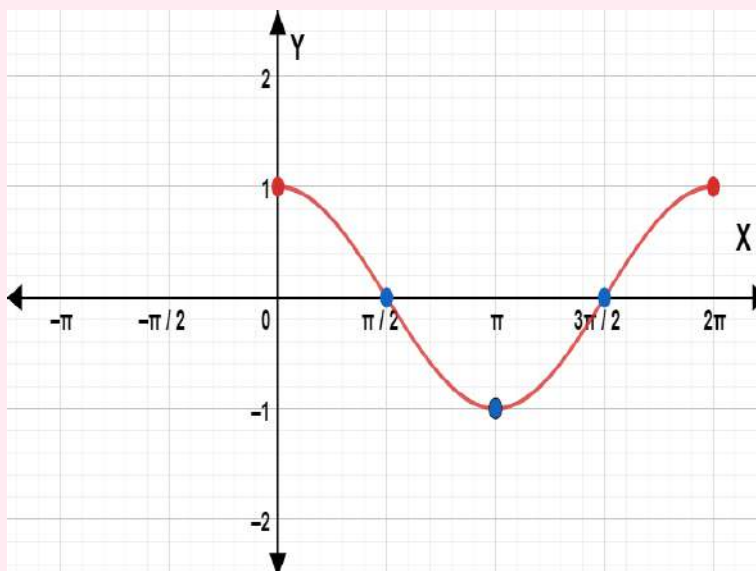
$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

El dominio y rango coinciden con los indicados para la función seno. En la tabla siguiente se incluyen algunos valores para el coseno de un ángulo en $[0, 2\pi]$.

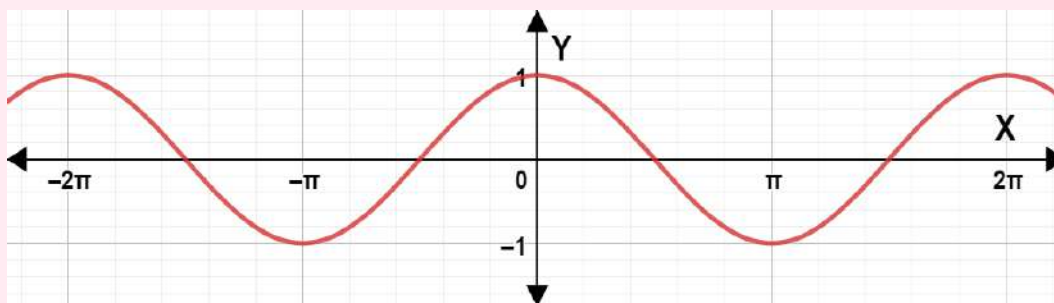
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \cos x$	1	0.866	0.707	0.5	0	1	0	1

El comportamiento de la función coseno en el ciclo básico, muestra que alcanza su valor máximo de 1 en $x = 0$ y $x = 2\pi$; el valor mínimo de -1 corresponde a $x = \pi$. La función se hace cero en

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ y } x = \frac{3\pi}{2}$$



El comportamiento de la función coseno en el ciclo básico, se repite periódicamente cada intervalo de 2π . La gráfica en $\mathbb{R}$ se presenta a continuación.



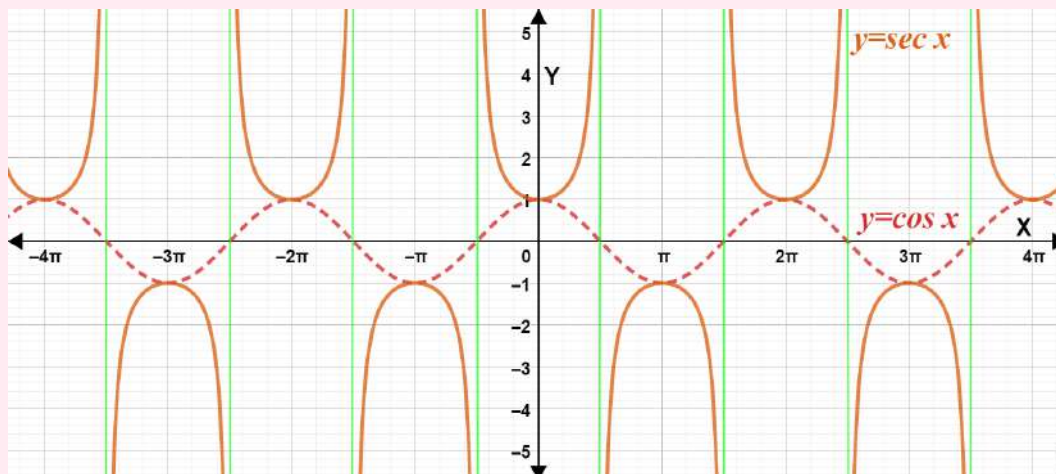
Función secante y función cosecante:

Dado que $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ y $\csc(x) = \frac{1}{\sin x}$, podemos estudiar el comportamiento de estas funciones a partir de las funciones seno y coseno.

■ Función secante:

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, no está definida cuando $\cos x = 0$, esto es, cuando $x = \frac{n\pi}{2}$ con n un entero impar.

El período también es 2π , pero la gráfica de la función secante no será continua, mostrará un comportamiento inverso a la función coseno en el sentido que si el coseno crece, la secante decrece y viceversa. La gráfica se muestra a continuación.



En la gráfica podemos observar que el contradominio de la función secante está dado por:

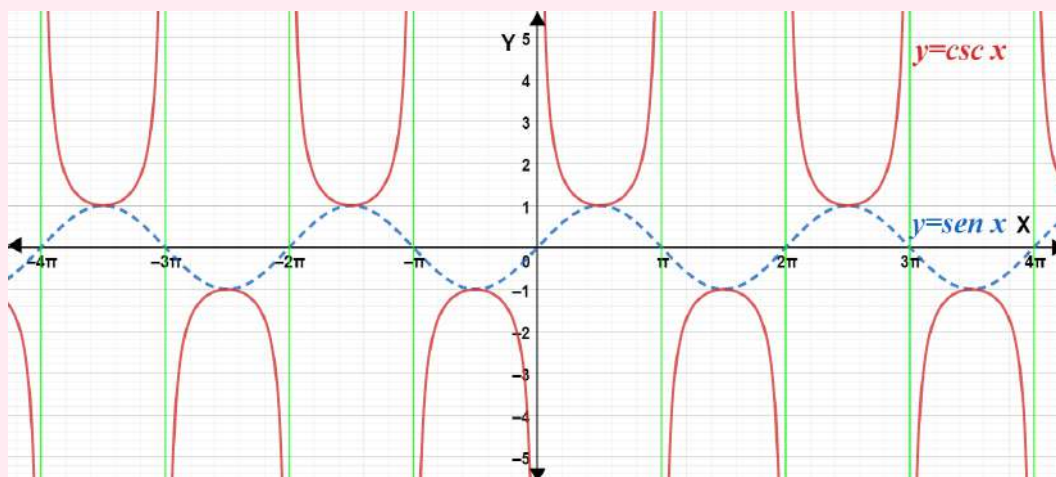
$$[1, \infty) \cup (-\infty, -1]$$

El dominio es: $\mathbb{R} - \{x / x = n\frac{\pi}{2}, n \text{ entero impar}\}$, esto significa, el conjunto de números reales, excepto los ceros de la función coseno.

■ Función cosecante:

De manera similar, $f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, no está definida si $\sin x = 0$, es decir, si $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Así, el dominio es $\mathbb{R} - \{x / x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$. En la figura siguiente se observa que el contradominio es $[1, \infty) \cup (-\infty, -1]$ y el período es 2π .



■ Función tangente y función cotangente:

Estas funciones pueden expresarse en términos de seno y coseno para identificar su dominio.

$$\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ si } \cos(x) \neq 0$$

es decir, el dominio de la función tangente es: $\mathbb{R} - \{x / x = n\frac{\pi}{2}, n \text{ entero impar}\}$.

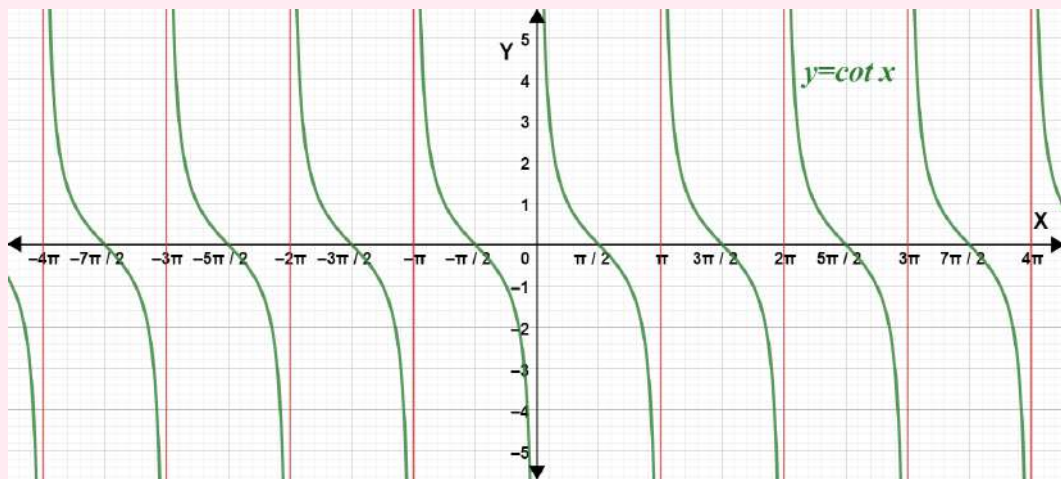
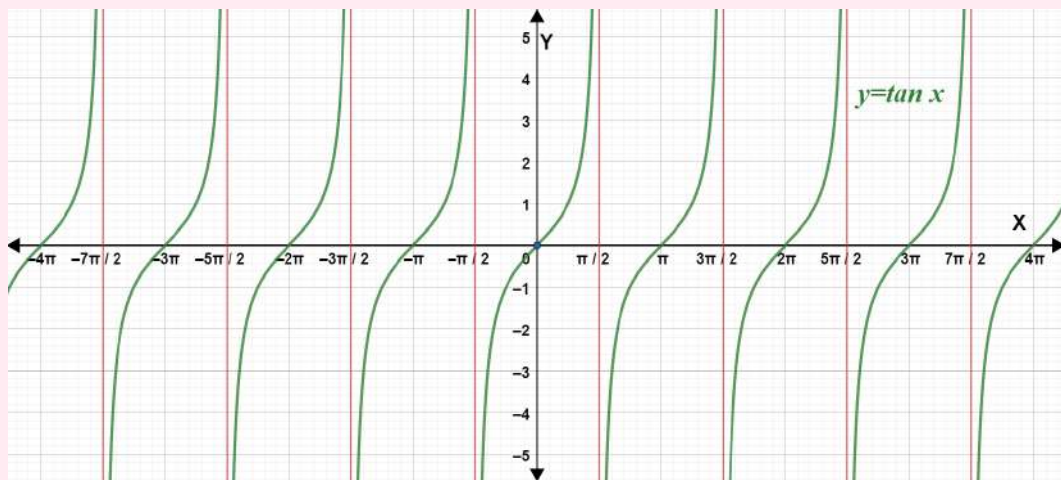
$\tan x = 0$ cuando $\sin x = 0$

De forma similar,

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \text{ si } \sin(x) \neq 0$$

esto permite establecer que el dominio está dado por $\mathbb{R} - \{x / x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $\cot x = 0$ si $\cos x = 0$.

En las gráficas siguientes se muestra el comportamiento de ambas funciones.



Para ambas funciones el período es de π y su contradominio es el conjunto de números reales.

4.1 Ejercicios resueltos

1. Identificar las ecuaciones que tienen solución, sin resolverlas. Fundamente la respuesta.

- a) $2 \sin x + 5 = 0$
- b) $2 - \sec x = 0$
- c) $3 \csc x - 1 = 0$
- d) $5 \sin x + 9 = 4$
- e) $3 \cos x - 7 = 0$

Solución:

Para determinar si las ecuaciones tienen solución, despejamos la función trigonométrica y analizamos si el valor que se contenga pertenece al contradominio.

a) $2 \sin(x) + 5 = 0$

$$2 \sin(x) + 5 = 0$$

$$2 \sin(x) = -5$$

$$\sin(x) = -\frac{5}{2}$$

La ecuación no tiene solución pues $f(x) = \sin x$ solo tiene valores entre $[-1, 1]$.

b) $2 - \sec(x) = 0$

$$2 - \sec(x) = 0$$

$$\sec(x) = 2$$

La ecuación si tiene solución ya que el valor dado pertenece al contradominio de la función secante, $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

c) $3 \csc(x) - 1 = 0$

$$3 \csc(x) - 1 = 0$$

$$\csc(x) = \frac{1}{3}$$

La ecuación no tiene solución ya que el valor está fuera del contradominio de la cosecante.

d) $5 \sin(x) + 9 = 4$

$$5 \sin(x) + 9 = 4$$

$$5 \sin(x) = -5$$

$$\sin(x) = -1$$

La ecuación tiene solución pues el valor -1 corresponde al valor mínimo de la función seno.

e) $3 \cos(x) - 7 = 0$

$$3 \cos(x) - 7 = 0$$

$$\cos(x) = \frac{7}{3}$$

La ecuación no tiene solución ya que el valor está fuera del contradominio de la función coseno.

2. Para cada una de las funciones dadas, expresarlas en forma factorizada:

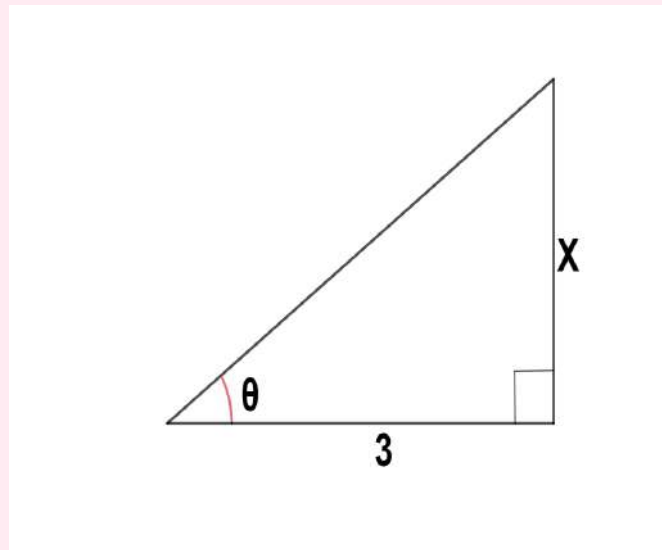
- a) $f(\theta) = \sin^2 \theta - \sin \theta - 2$
- b) $f(\alpha) = 3 \cot^2 \alpha + 7 \cot \alpha - 6$
- c) $f(x) = \tan^2 x + 2 \tan x - 8$

Solución:

Al observar las expresiones de las funciones trigonométricas dadas, notamos que son trinomios, así que eligimos esa estrategia de factorización:

- a) $f(\theta) = \sin^2 \theta - \sin \theta - 2 = (\sin \theta - 2)(\sin \theta + 1)$
 - b) $f(\alpha) = 3 \cot^2 \alpha + 7 \cot \alpha - 6 = (3 \cot \alpha - 2)(\cot \alpha + 3)$
 - c) $f(x) = \tan^2 x + 2 \tan x - 8 = (\tan x - 2)(\tan x + 4)$
-

3. Con base en la figura mostrada convertir la función algebraica $f(x) = x^2 \sqrt{x^2 + 9}$ en una función trigonométrica que incluya solo seno y coseno.



Solución:

Se conocen los catetos, por lo que $\tan \theta = \frac{x}{3}$, al despejar x y elevarla al cuadrado obtenemos:

$$3 \tan \theta = x$$

$$9 \tan^2 \theta = x^2$$

Sustituimos en la expresión dada.

$$\begin{aligned} x^2 \sqrt{x^2 + 9} &= 9 \tan^2 \theta \sqrt{9 \tan^2 \theta + 9} \\ &= 9 \tan^2 \theta \sqrt{9(\tan^2 \theta + 1)} \\ &= 9 \tan^2 \theta (3) \sqrt{\tan^2 \theta + 1} \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión dentro de la raíz, expresamos $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$:

$$\begin{aligned}
 x^2 \sqrt{x^2 + 9} &= 27 \tan^2 \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1} \\
 &= 27 \tan^2 \theta \sqrt{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \\
 &= 27 \tan^2 \theta \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \theta}} \\
 &= 27 \tan^2 \theta \frac{\sqrt{1}}{\cos \theta} \\
 &= \frac{27 \tan^2 \theta}{\cos \theta} \\
 &= 27 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \\
 &= \frac{27 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}
 \end{aligned}$$

Respuesta:

La función en términos de funciones trigonométricas es $f(\theta) = \frac{27 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}$

.....

4. Si $f(\theta) = \sin 2\theta$, $g(\theta) = 2 \sin \theta$ y $h(\theta) = \cos \theta$

a) Evaluar las tres funciones en $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) Determinar en los tres casos el valor de $(g * h)(\theta)$ y compárelo con $f(\theta)$

Solución:

Para el inciso a), evaluamos las tres funciones en los valores indicados.

Para la función $f(\theta)$

$$f(\theta) = \sin 2\theta$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 * \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.866$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 * \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 * \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.866$$

Para la función $g(\theta)$

$$g(\theta) = 2 \sin \theta$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.732$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.414$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

Para la función $h(\theta)$

$$h(\theta) = \cos \theta$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707$$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.866$$

Para el inciso b), realizamos el producto $(g * h)(\theta) = g(\theta)h(\theta)$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) * h\left(\frac{\pi}{3}\right) = (1.732)(0.5) = 0.866$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) * h\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1.414)(0.707) = 0.999 \cong 1$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) * h\left(\frac{\pi}{6}\right) = (1)(0.866) = 0.866$$

Al comparar los resultados, notamos que:

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$\sin 2\theta = 0.866$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 0.866$$

Para $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\sin 2\theta = 1$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

Para $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$\sin 2\theta = 0.866$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 0.866$$

En estudios posteriores se analizará la expresión $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ para cualquier ángulo.

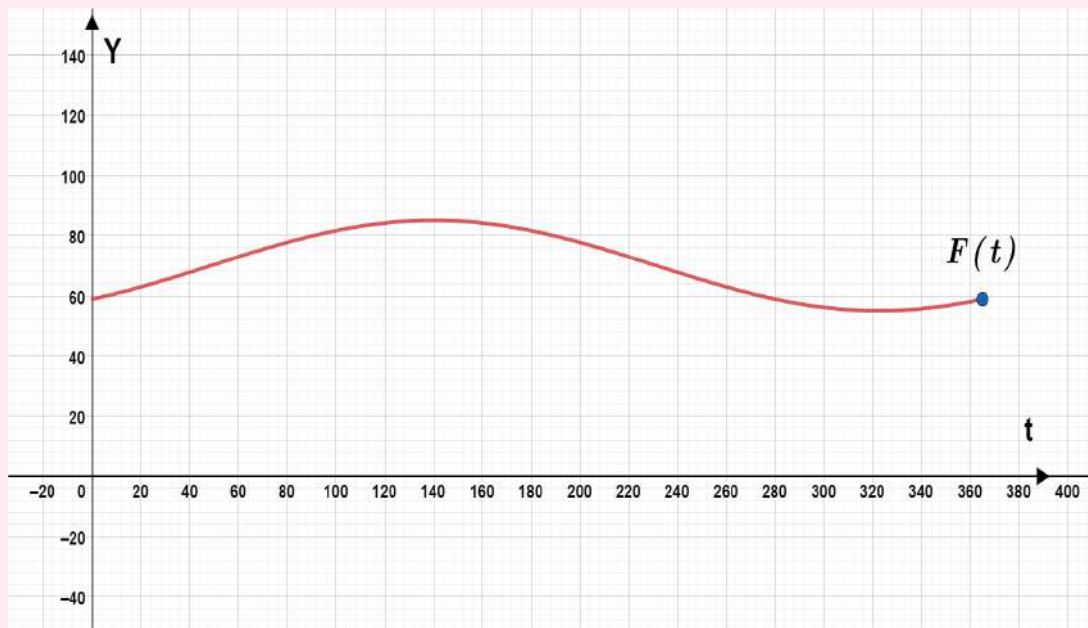
.....

5. Las funciones trigonométricas se aplican para el estudio de diversos fenómenos.

Por ejemplo, la temperatura promedio diaria en cierta región se estima con el modelo:

$$F(t) = 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(t - 140) \right]$$

Con F medida en grados Fahrenheit, t el día del año con $t = 1$ para 1 de enero.



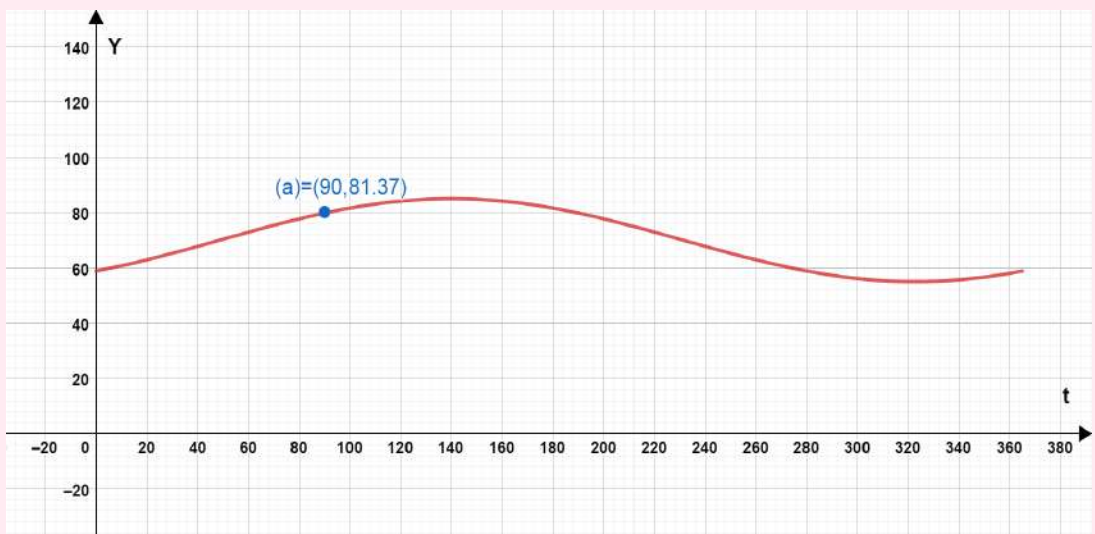
Estimar la temperatura en un año no bisiesto para:

- a) 31 de marzo
- b) 30 de junio
- c) 31 de diciembre
- d) 20 de marzo

Solución:

a) En un año no bisiesto, al 31 de marzo corresponde un valor de $t = 31 + 28 + 31 = 90$

$$\begin{aligned}
 F(90) &= 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(90 - 140) \right] \\
 &= 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(-50) \right] \\
 &= 70 + 15 \cos \left[-\frac{100\pi}{365} \right] \\
 &= 70 + 15 \cos \left[-\frac{20\pi}{73} \right] \\
 &= 70 + 15(0.7589) \\
 &= 81.16
 \end{aligned}$$



b) Para el 30 de junio, $t = 31 + 28 + 21 + 30 + 31 + 30 = 181$

$$\begin{aligned}
 F(181) &= 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(181 - 140) \right] \\
 &= 70 + 15 \cos \left[\frac{82\pi}{365} \right] \\
 &= 81.37
 \end{aligned}$$



c) Para el 31 de diciembre $t = 365$.

$$\begin{aligned} F(365) &= 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(365 - 140) \right] \\ &= 70 + 15 \cos \left[\frac{90\pi}{365} \right] \\ &= 58.84 \end{aligned}$$



d) El 20 de marzo corresponde al día 140 del año.

$$\begin{aligned} F(140) &= 70 + 15 \cos \left[\frac{2\pi}{365}(140 - 140) \right] \\ &= 70 + 15 \cos 0 \\ &= 70 + 15 \\ &= 85 \end{aligned}$$



4.2 Ejercicios para la autoevaluación:

1. Simplificar a su mínima expresión las siguientes funciones:

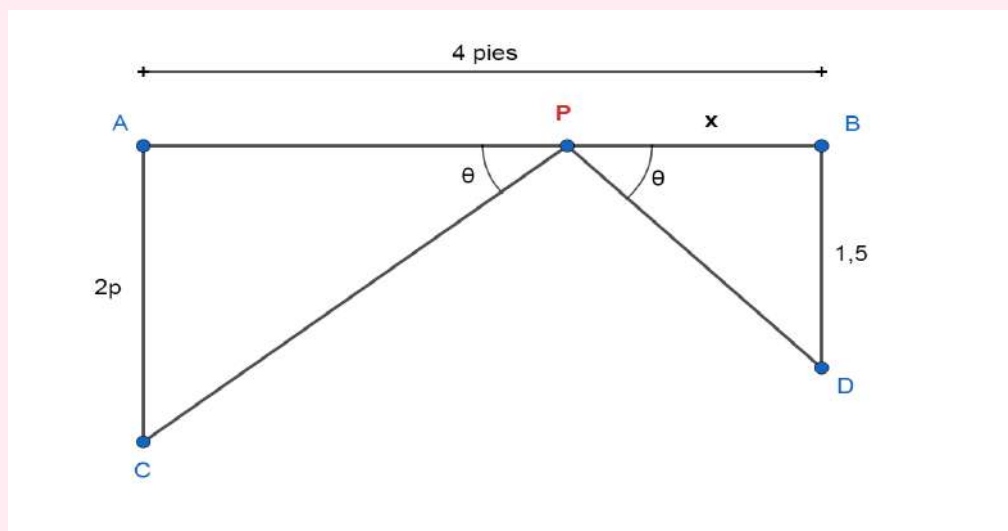
a) $f(\theta) = \frac{4\cos^2 \theta - 1}{2\cos^2 \theta - 5\cos \theta - 3}$

$R/f(\theta) = \frac{2\cos \theta - 1}{\cos \theta - 3}$

b) $f(\theta) = \frac{9 - \sin^2 2\theta}{9 - 6\sin 2\theta + \sin^2 2\theta}$

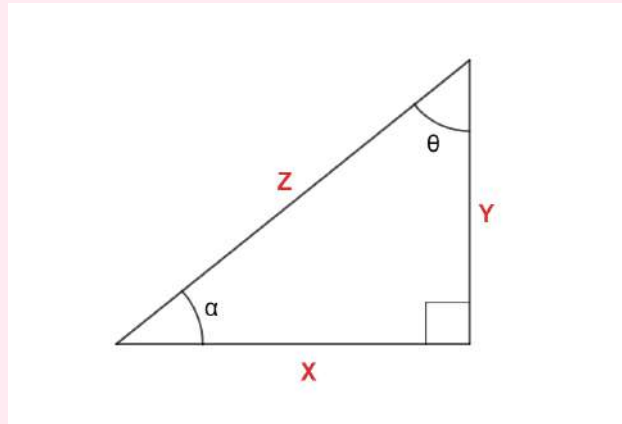
$R/f(\theta) = \frac{\sin 2\theta + 3}{3 - \sin 2\theta} \quad \bullet \quad -f(\theta) = \frac{\sin 2\theta + 3}{\sin 2\theta - 3}$

2. Con base en la figura que se muestra, determinar la distancia de P a B



R/ La distancia de P a B es 1.71 pies

3. Con base en la figura mostrada, transformar la función algebraica $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ en una función trigonométrica de seno y coseno.



R/ La función en términos de senos y cosenos es $f(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta}{\cos \theta}$

4. Verificar si se cumple la expresión dada por:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Para:

- a) $x = \frac{\pi}{6}$
- b) $x = \frac{7}{3}\pi$
- c) $x = \frac{11}{5}\pi$

R/ Si se cumple en todos los casos.

5. Un ingeniero gerente de mercadeo estima las ventas mensuales mediante el modelo

$$V = 28 + 6.4 \sin \left(\frac{\pi}{6} t \right)$$

donde V es el número de millones de unidades vendidas, t es el mes del año con $t = 1$ para el mes de enero. Estimar el número de unidades vendidas en:

- a) Marzo
- b) Junio
- c) Septiembre
- d) Diciembre

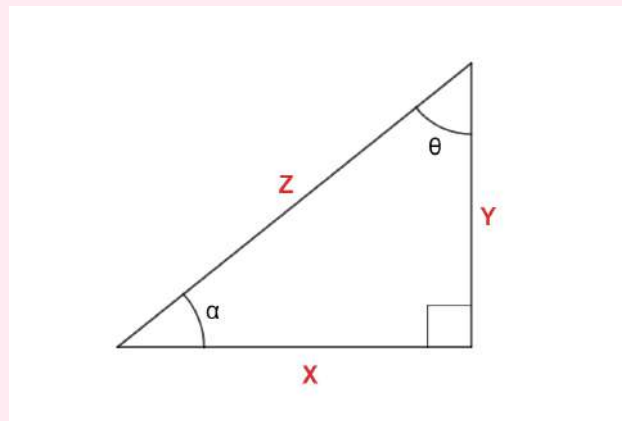
Respuestas:

- a) 34.4 millones
- b) 28 millones
- c) 21.6 millones
- d) 28 millones

5. Trigonometría del triángulo rectángulo

Las aplicaciones de la trigonometría del triángulo rectángulo se basan en la definición de las razones trigonométricas para ángulos agudos y sus complementos, el teorema de Pitágoras, así como algunos conceptos y nociones sobre ángulos de visión.

Como recordatorio analizaremos las razones trigonométricas para los ángulos complementarios α y θ .



$$\alpha + \theta = 90^\circ \text{ por lo que } \theta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos \theta = \frac{y}{z}$$

$$\cos \alpha = \sin \theta = \frac{x}{z}$$

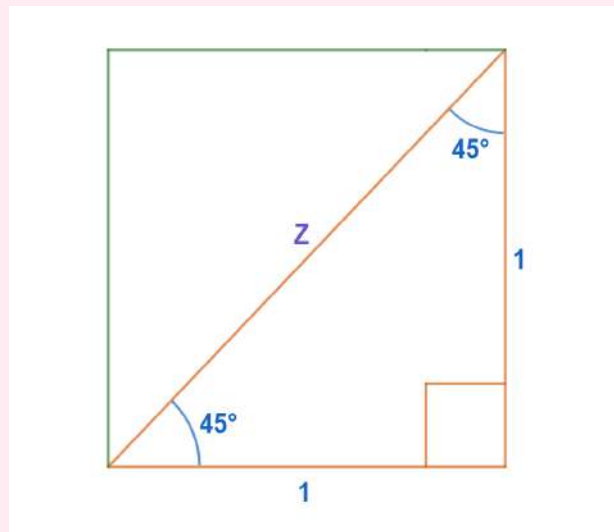
$$\tan \alpha = \cot \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \tan \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \csc \theta = \frac{z}{x} \qquad \csc \alpha = \sec \theta = \frac{z}{y}$$

Entre los triángulos rectángulos, hay dos llamados **especiales**, que son el triángulo rectángulo isósceles y el triángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° .

Un triángulo rectángulo isósceles se puede obtener al trazar una diagonal de un cuadrado de lado 1, como se muestra en la figura. Esto ocasiona que los ángulos agudos midan 45° .



La medida de la diagonal corresponde a la hipotenusa del triángulo, por lo que su valor es:

$$z^2 = 1^2 + 1^2$$

$$z = \sqrt{2}$$

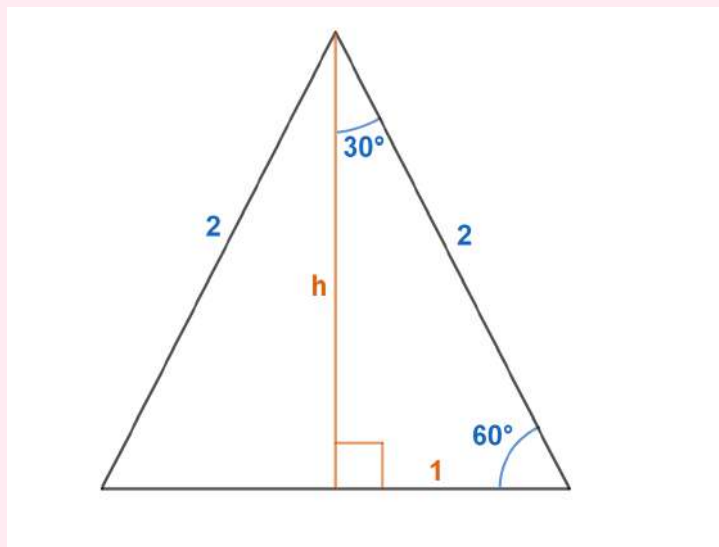
Esto permite conocer los valores de las razones trigonométricas para un triángulo de 45° .

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45^\circ = 1$$

El triángulo rectángulo con ángulos agudos de 30° y 60° , se puede obtener al trazar una altura de un triángulo equilátero, por ejemplo con $l = 2$, como el que se muestra.



Calculamos el valor de h como:

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Notamos que para el ángulo de 30° la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa es de 1 a 2, es decir, por cada unidad que mida el cateto opuesto, la hipotenusa mide dos unidades. Así:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{2}$$

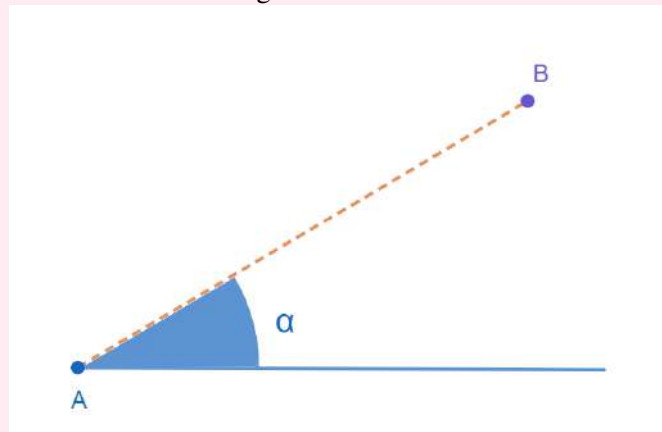
$$\csc 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

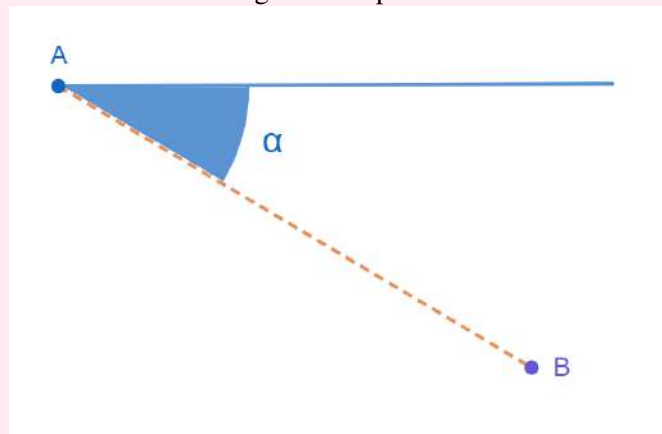
$$\sec 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En muchas aplicaciones se involucra el concepto de ángulo de visión, el cual se forma entre una línea horizontal y una línea imaginaria de visión. Si el ángulo de visión es desde abajo hacia arriba, se conoce como **ángulo de elevación**, mientras que si se mira desde arriba hacia abajo, se llama **ángulo de depresión**.

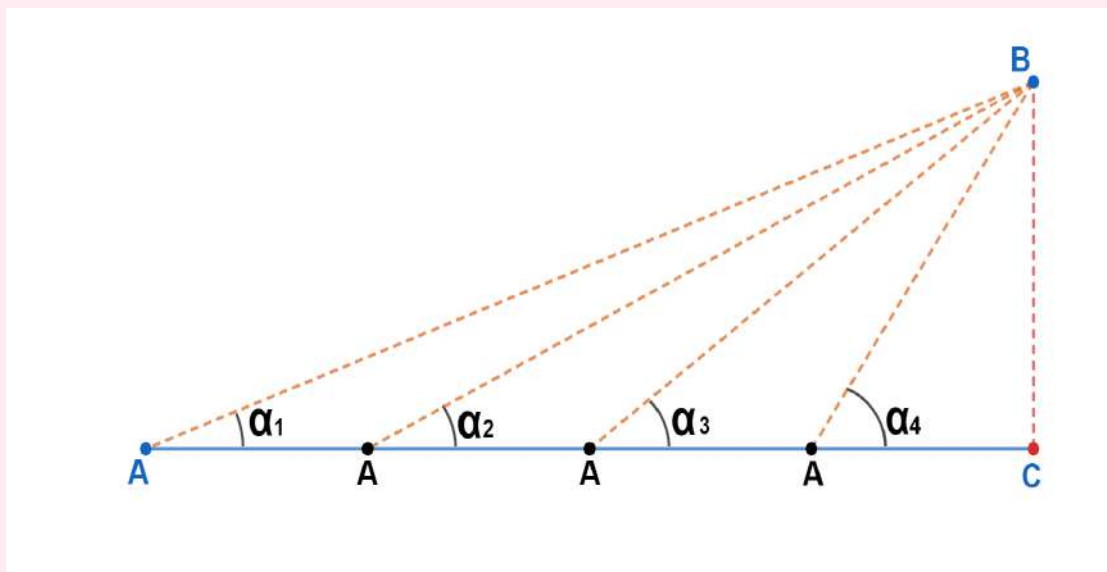
Ángulo de elevación



Ángulo de depresión



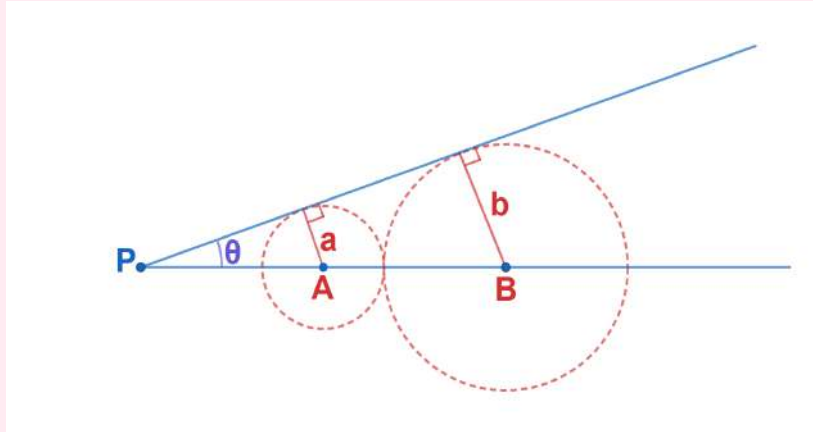
De forma intuitiva podemos establecer que a medida que la distancia horizontal a un punto de observación decrece, el ángulo de elevación es mayor. Como ejemplo se muestra que a medida que el punto A se acerca a un punto C justo debajo de B, el ángulo α crece.



5.1 Ejercicios resueltos

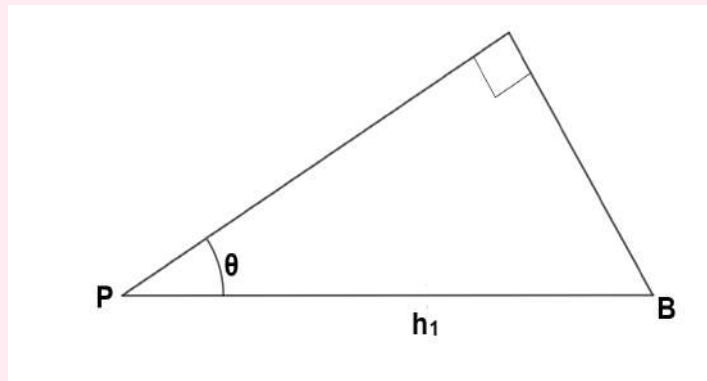
1. En la figura se muestran dos círculos tangentes entre sí de radios a y b , cuyos centros A y B son colineales con el vértice P . Determinar:

- Una expresión para $\sin \theta$ y $\cos \theta$ en términos de los radios.
- Evaluar el valor de las expresiones para $a = 1$ y $b = 2$.

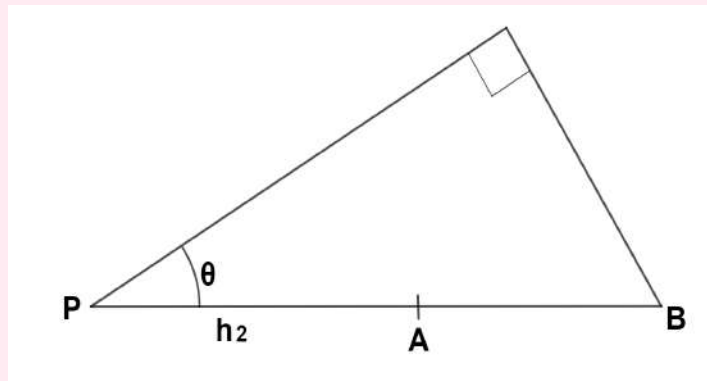


Solución:

- En la figura observamos la formación de dos triángulos rectángulos. Para el pequeño la hipotenusa h_1 es la distancia de P a A .



Para el grande, la hipotenusa h_2 es la distancia del punto P al punto B .



Además, notamos que:

$$h_2 = h_1 + a + b$$

Como el ángulo θ pertenece a ambos triángulos, podemos expresar:

$$\sin \theta = \frac{a}{h_1} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{b}{h_2}$$

Esto significa que:

$$\frac{a}{h_1} = \frac{b}{h_2}$$

Sustituyendo h_2 , obtenemos

$$\frac{a}{h_1} = \frac{b}{h_1 + a + b}$$

Operamos y simplificamos

$$a(h_1 + a + b) = bh_1$$

$$ah_1 + a^2 + ab = bh_1$$

$$a^2 + ab = bh_1 - ah_1$$

$$a(a + b) = h_1(b - a)$$

Podemos describir la expresión como

$$\frac{a}{h_1} = \frac{b - a}{a + b}$$

Por lo que:

$$\sin \theta = \frac{a}{h_1} = \frac{b - a}{a + b}$$

Para determinar una expresión para el coseno del ángulo, aplicamos la identidad

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Despejamos y simplificamos.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{b - a}{a + b} \right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{(b - a)^2}{(a + b)^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{(a + b)^2 - (b - a)^2}{(a + b)^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2}{(a + b)^2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{4ab}{(a + b)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b}$$

b) Para el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$, tenemos

$$\sin \theta = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{1*2}}{2+1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Respuesta:

$$\text{a) } \sin \theta = \frac{b-a}{a+b}, \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

$$\text{b) } \sin \theta = \frac{1}{3}, \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

.....

2. Para el movimiento de un proyectil en el plano se conoce que la trayectoria tiene forma parabólica. La distancia horizontal o alcance está dada por la expresión:

$$R = \frac{2V_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Con: V_o = velocidad inicial, θ = ángulo de lanzamiento y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

- Determinar el alcance de un proyectil que se dispara con velocidad inicial de 150 m/s con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal.
- Si la altura máxima que puede alcanzar un proyectil está dada por:

$$h_{\max} = \frac{V_o^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Determinar hasta qué altura llega el proyectil.

Solución:

- Se sabe que el alcance se puede calcular con la expresión

$$R = \frac{2V_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Por lo que se evalúa para los valores indicados

$$R = \frac{2(150)^2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ}{9.8}$$

$$R = \frac{2(150)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{9.8} = 3,976.65 \text{ m}$$

b) La altura máxima que alcanza el proyectil es:

$$h_{max} = \frac{150^2 (\sin 30^\circ)^2}{2(9.8)}$$

$$h_{max} = \frac{150^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2(9.8)} = 286.99 \text{ m}$$

Respuesta:

Ra/ La distancia que recorre el proyectil es de 3,976.65m. Rb/ La altura máxima que alcanza el proyectil es de 286.99m.

.....

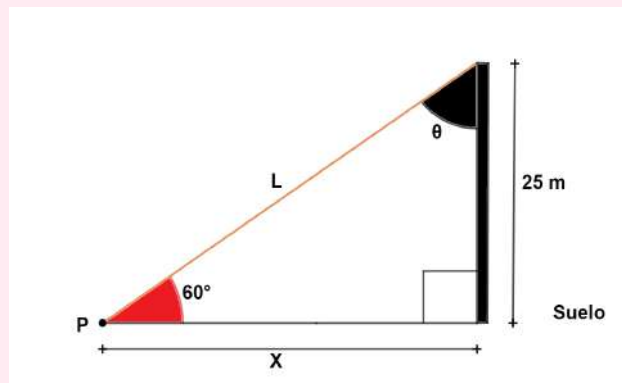
3. Desde el extremo superior de una torre de telefonía celular de 25m de altura, se debe colocar un cable y sujetarlo a un punto en el suelo a x metros de distancia de la base.

Si el cable debe formar un ángulo de 60° con la horizontal, determinar:

- La longitud del cable.
- La distancia a la base, del punto donde se sujeta el cable.

Solución:

En la figura representamos la situación descrita.



- En el triángulo rectángulo que se forma, la longitud del cable es la medida de la hipotenusa. Puesto que conocemos el cateto opuesto a 60° ,

$$\sin 60^\circ = \frac{25}{L}$$

Despejamos L y calculamos su valor:

$$L = \frac{25}{\sin 60^\circ} = \frac{25}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{50\sqrt{3}}{3} \cong 28.27 \text{ m}$$

- b) La distancia de la base del poste al punto donde se sujeta el cable, se denota por x , es el cateto opuesto al ángulo θ . Dicho ángulo mide 30° por lo que, x y L están en relación de 1 a 2. Podemos expresar x como la mitad de L .

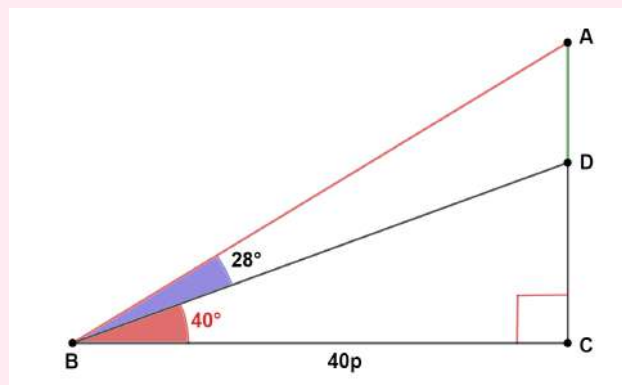
$$x = \frac{L}{2} = 14.43m$$

Respuesta:

Ra/ La longitud del cable es de 28.27 metros. Rb/ La distancia del poste a la base es de 14.43 metros.

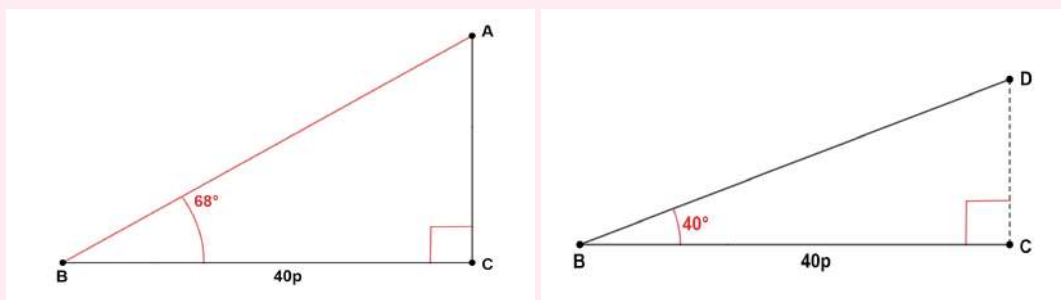
.....

4. Una persona observa una valla publicitaria desde una distancia de 40 pies, mide los ángulos que se muestran en la figura. Determinar el alto de la valla, AD .



Solución:

Separamos la figura en dos triángulos rectángulos.



En $\Delta 1$:

$$\tan 68^\circ = \frac{AC}{40}$$

$$AC = 40 \tan 68^\circ$$

$$AC = 99 \text{ pies}$$

En $\Delta 2$:

$$\tan 40^\circ = \frac{DC}{40}$$

$$DC = 40 \tan 40^\circ$$

$$DC = 33.56 \text{ pies}$$

Calculamos la distancia AD :

$$AD + DC = AC$$

$$AD = AC - DC = 99 - 33.56 = 65.44 \text{ pies}$$

Respuesta:

La valla tiene 65.44 pies de altura.

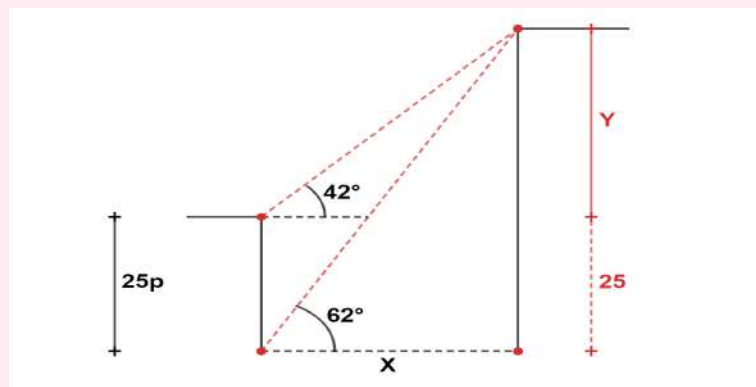
.....

5. Desde la terraza de una casa de 25 pies de altura se mide un ángulo de elevación de 42° hacia el techo de un edificio de oficinas; mientras que desde el suelo al lado de la casa, el ángulo de elevación mide 62° . Determinar:

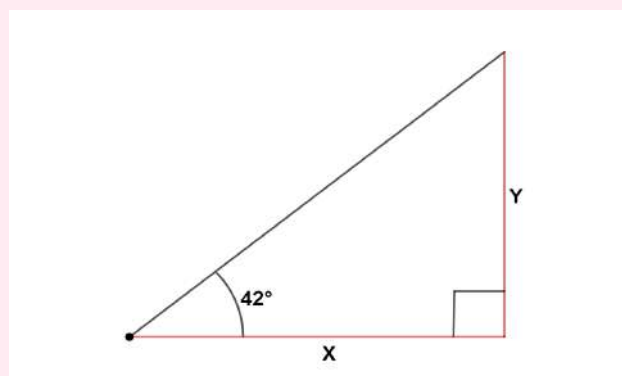
- La altura del edificio.
- La distancia entre la casa y el edificio.

Solución:

Con base en la siguiente figura identificamos las distancias que debemos calcular.



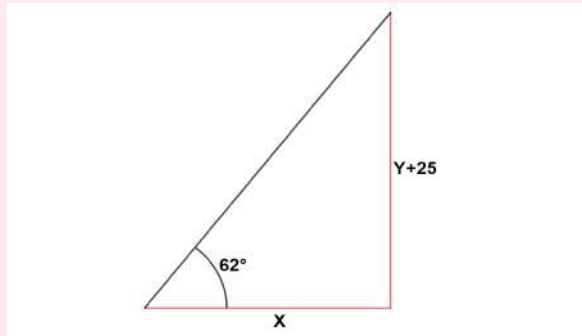
- La altura del edificio es $h = y + 25$. Para calcular el valor de y trabajamos con el siguiente triángulo.



$$\tan 42^\circ = \frac{y}{x}$$

$$x = \frac{y}{\tan 42^\circ}$$

Ahora procedemos de forma similar con el otro triángulo.



$$\tan 62^\circ = \frac{y+25}{x}$$

$$x = \frac{y+25}{\tan 62^\circ}$$

Igualemos ambas expresiones de x ,

$$\frac{y}{\tan 42^\circ} = \frac{y+25}{\tan 62^\circ}$$

$$y \tan 62^\circ = y \tan 42^\circ + 25 \tan 42^\circ$$

$$y \tan 62^\circ - y \tan 42^\circ = 25 \tan 42^\circ$$

$$y = \frac{25 \tan 42^\circ}{\tan 62^\circ - \tan 42^\circ} = \frac{25(0.90)}{1.88 - 0.90}$$

$$y = \frac{22.51}{0.98} = 22.97$$

La altura del edificio es:

$$h = 22.97 + 25 = 47.97$$

b) Para calcular la distancia entre la casa y el edificio, utilizamos una de las expresiones de x :

$$x = \frac{y}{\tan 42^\circ}$$

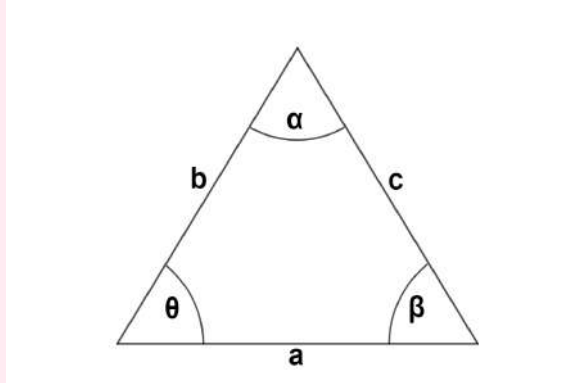
$$x = \frac{22.97}{0.9} = 25.52 \text{ pies}$$

Respuesta:

Ra/ La altura del edificio es de 47.97 pies. Rb/ La distancia de la casa al edificio es de 25.52 pies.

5.2 Ejercicios para la autoevaluación

- En la figura se muestra un triángulo isósceles. Determinar:
 - Una expresión para el área del triángulo en términos de a y el ángulo θ .
 - Calcular el área para $a = 5 \text{ cm}$ y $\theta = 54^\circ$



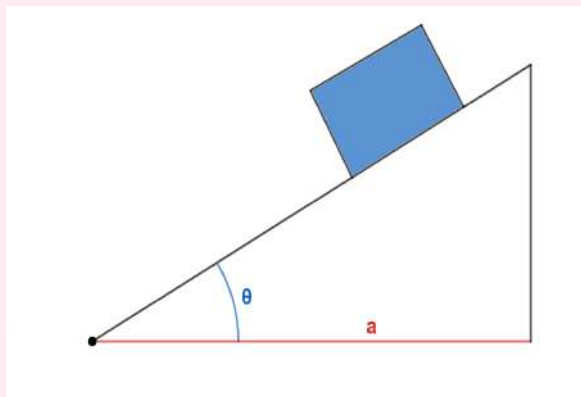
Ra/ $a^2 \sin \theta \cos \theta$; **Rb/** 11.95 cm^2

- Cuando un bloque se desliza en un plano inclinado con un ángulo θ , el tiempo t (en segundos) que tarda en deslizarse (sin fricción) está dado por:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \sin \theta \cos \theta}}$$

Donde a es la longitud de la base y $g \cong 32 \text{ ft/s}^2$. Con base en la figura, determinar el tiempo para:

- $a = 10$ y $\theta = 40^\circ$
- $a = 12$ y $\theta = 65^\circ$



Ra/ 1.13 segundos; **Rb/** 1.4 segundos

- Un salvavidas se ubica en torre de observación a 50 pies sobre el nivel de la playa. Al observar un grupo de niños nadando, mide un ángulo de depresión de 56° . Determinar a qué distancia de la base de la torre se encuentran nadando los niños.

R/ Se encuentran a 33.73 pies.

4. Un fotógrafo toma una fotografía de la cima de una montaña de 42m de altura, desde un punto en el que el ángulo de elevación es 20° . Continúa caminando y toma otra fotografía en el punto en el que el ángulo de elevación es de 25° . Determinar la distancia que recorre entre ambos puntos.

R/ La distancia entre ambos puntos es de 25.66 metros.

5. Desde un punto a 10 metros de altura se observa la parte más alta de un cerro con un ángulo de elevación de 42° , mientras que su base se observa con un ángulo de depresión de 8° . Determinar la altura del cerro.

R/ La altura del cerro es de 74.24 metros.

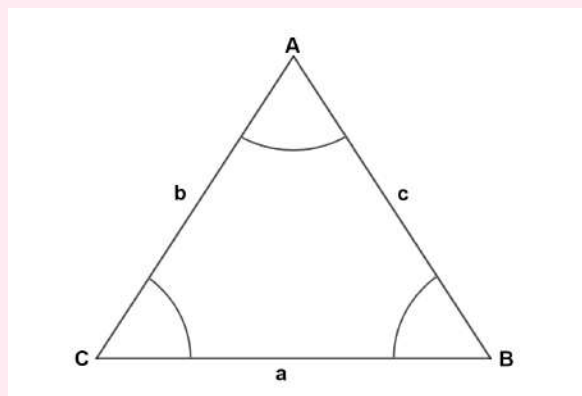
6. Ley de senos

El teorema conocido como **Ley de Senos** es de gran utilidad por su aplicación a cualquier tipo de triángulo, es decir, es válido sin importar la medida de los lados y de los ángulos internos.

La Ley de Senos expresa que:

Las medidas de los lados de cualquier triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Con base en la siguiente figura, escribimos lo anterior como una expresión matemática.



Para el triángulo con ángulos α , β y θ y lados opuestos a , b y c , respectivamente se cumple que:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \theta}$$

En la aplicación de la Ley de Senos, se considera la igualdad de dos de las razones indicadas en función de la información conocida, por lo que puede ser que se conozcan dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, o bien, dos lados y un ángulo (uno de los lados opuestos al ángulo).

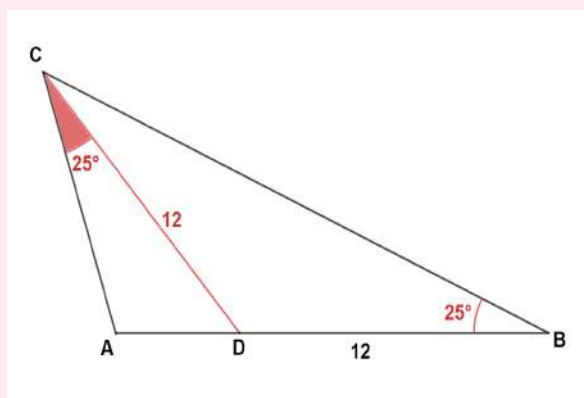
Por ejemplo, para las primeras razones sería

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad o \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad o \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

.....

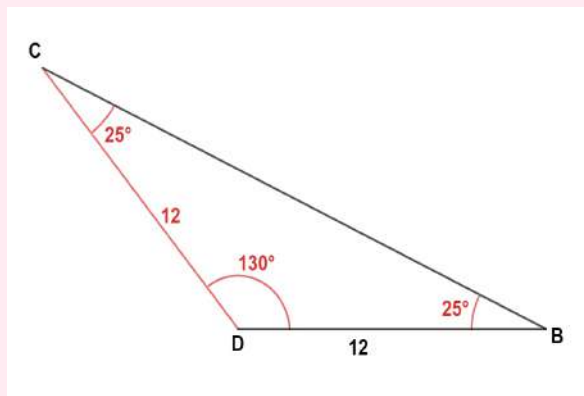
6.1 Ejercicios resueltos

1. En el triángulo obtusángulo ABC se traza el segmento CD y se generan otros triángulos también obtusángulos, como se muestra en la figura. Determinar la longitud del segmento BC y la longitud del segmento AD .



Solución:

Podemos observar que el triángulo con vértices en B , C y D es isósceles, ya que dos de sus lados miden 12 unidades.



Con esta base podemos determinar que el ángulo BCD mide 25° y que el ángulo CDB mide:

$$180^\circ - 25^\circ - 25^\circ = 130^\circ$$

Para calcular la longitud del segmento BC , aplicamos la Ley de Senos:

$$\frac{BC}{\sin 130^\circ} = \frac{12}{\sin 25^\circ}$$

$$BC = \frac{12 \sin 130^\circ}{\sin 25^\circ}$$

$$BC = \frac{9.19}{0.42} = 21.88$$

A continuación, observamos en la figura original que el ángulo ADC es el suplemento del ángulo CDB , que mide 130° , por lo que su medida es:

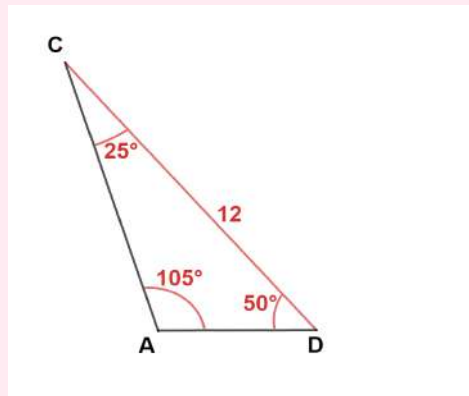
$$180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Esto permite determinar que el ángulo con vértice en A mide:

$$180^\circ - 50^\circ - 25^\circ = 105^\circ$$

También es posible determinar este valor de otras formas.

Para calcular la longitud del segmento AD aplicamos la Ley de Senos en la siguiente figura.



$$\frac{12}{\sin 105^\circ} = \frac{AD}{\sin 25^\circ}$$

$$AD = \frac{12 \sin 25^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$AD \cong 5.23$$

Se sugiere ensayar otras formas alternas de solución.

Respuesta:

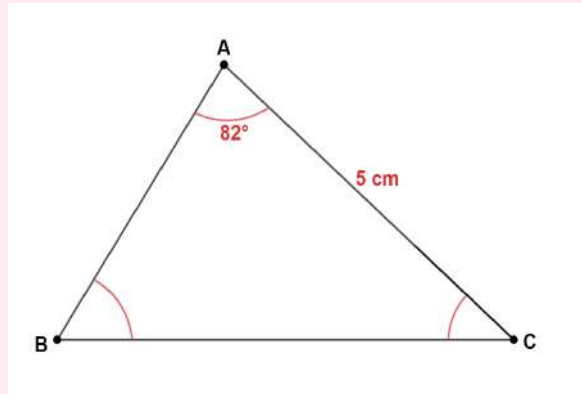
El segmento BC mide 21.88 unidades y el segmento AD mide 5.23 unidades.

.....

2. En un triángulo con vértices en A , B y C , se conoce que el ángulo en A mide el doble que el ángulo en C . El segmento AC mide 5cm y el lado de BC es dos centímetros mayor que el lado AB . Si el ángulo en A mide 82° , determinar la longitud de los lados AB y BC .

Solución:

Los vértices A , B y C pueden colocarse de muchas formas que generan triángulos equivalente, se elige la forma que se muestra en la figura.



El ángulo en A mide el doble que el ángulo en C , entonces $\angle C = 41^\circ$.

El ángulo en B se calcula así:

$$\angle B = 180^\circ - 82^\circ - 41^\circ = 57^\circ$$

Para calcular la longitud de los lados AB y BC aplicamos la Ley de Senos:

$$\frac{AB}{\sin 41^\circ} = \frac{5}{\sin 57^\circ}$$

$$AB = \frac{5 \sin 41^\circ}{\sin 57^\circ}$$

$$AB = \frac{3.28}{0.84} = 3.9 \text{ cm}$$

$$\frac{BC}{\sin 82^\circ} = \frac{5}{\sin 57^\circ}$$

$$BC = \frac{5 \sin 82^\circ}{\sin 57^\circ}$$

$$BC = \frac{4.95}{0.84} = 5.89 \text{ cm}$$

Respuesta:

La longitud del segmento AB es de 3.9cm mientras que la longitud del segmento BC es de 5.89 cm.

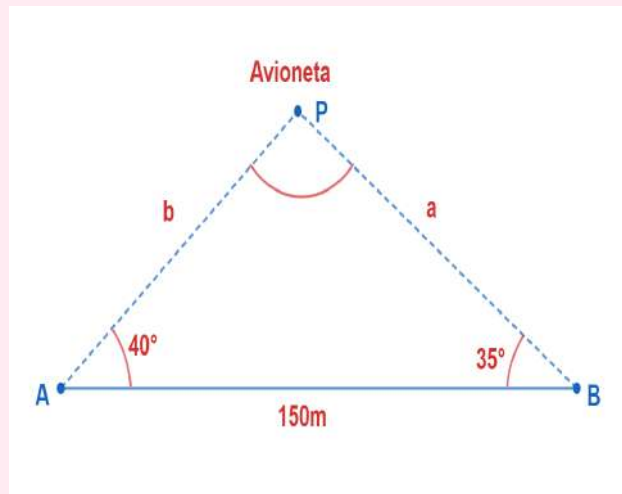
.....

3. Dos observadores separados 150 metros entre sí miden ángulos de elevación de 40° y 35° , cuando una avioneta pasa volando sobre la línea donde ubican. Determinar:

- La distancia de cada observador a la avioneta.
- La altitud a la que volaba la avioneta.

Solución:

La situación puede representarse de varias formas, se muestra una de ellas.



- a) El ángulo entre las líneas de visión de A y B mide: $180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$

Aplicamos la Ley de Senos para calcular las distancias desde la avioneta a cada uno de los observadores:

$$\frac{150}{\sin 105^\circ} = \frac{a}{\sin 40^\circ}$$

$$a = \frac{150 \sin 40^\circ}{\sin 105^\circ}$$

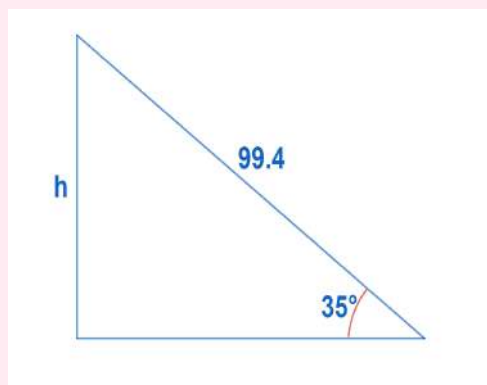
$$a = \frac{96.42}{0.97} = 99.4 \text{ m}$$

$$\frac{150}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sin 35^\circ}$$

$$b = \frac{150 \sin 35^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$b = \frac{86.04}{0.97} = 88.7 \text{ m}$$

- b) Para calcular la altitud a la que vuela la avioneta podemos trazar la altura del triángulo desde P y utilizar cualquiera de los triángulos resultantes.



$$\sin 35^\circ = \frac{h}{99.4}$$

$$h = 99.4 \sin 35^\circ = 57.01 \text{ metros}$$

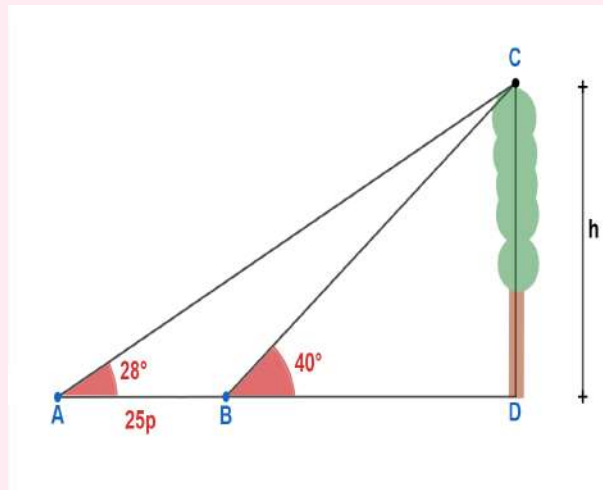
Respuesta:

Ra/ La avioneta está a 88.7 metros del espectador A y a 99.4 metros del espectador B.

Rb/ La avioneta se encontraba a una altitud de 57.01 metros.

.....

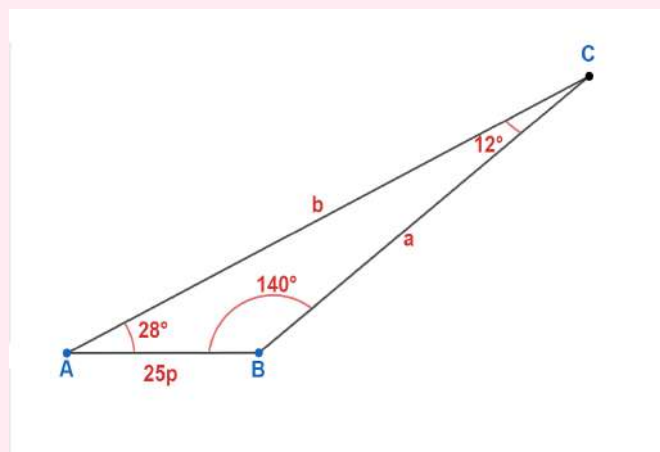
4. Para estimar la altura de un árbol se mide el ángulo de elevación desde dos puntos diferentes, el primero es de 28° y 25 pies adelante es de 40° . Determinar la altura del árbol.



Solución:

En el triángulo ABC, el ángulo en B mide 140° porque es el suplemento de 40° , mientras que el ángulo en C mide:

$$180^\circ - 28^\circ - 140^\circ = 12^\circ$$



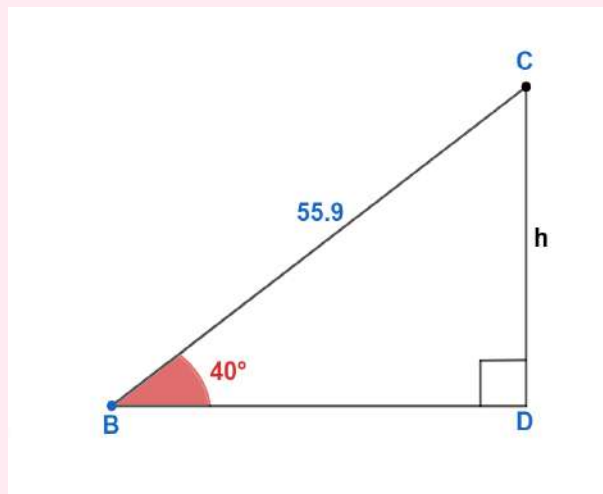
Aplicamos la Ley de Senos para calcular a

$$\frac{a}{\sin 28^\circ} = \frac{25}{\sin 12^\circ}$$

$$a = \frac{25 \sin 28^\circ}{\sin 12^\circ}$$

$$a = \frac{11.74}{0.21} = 55.9 \text{ pies}$$

Ahora analizamos el triángulo con vértices en B , C y D .



Con el triángulo es rectángulo podemos plicar las razones trigonométricas.

$$\sin 40^\circ = \frac{h}{55.9}$$

$$h = 55.9 \sin 40^\circ = 35.93 \text{ pies.}$$

Respuesta:

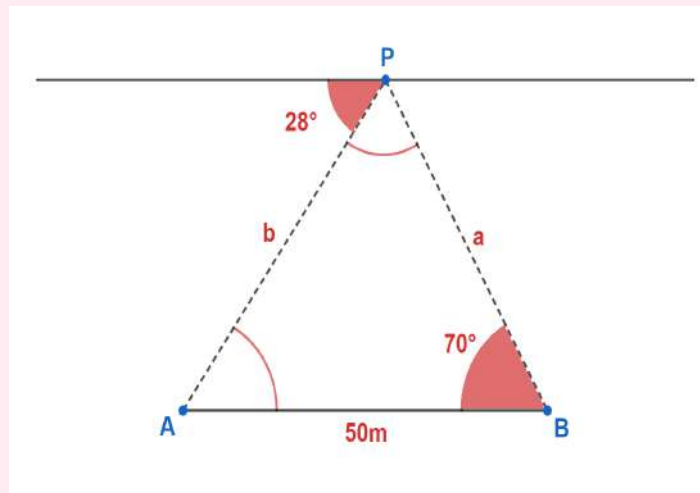
El árbol tiene una altura de 35.43 pies.

.....

5. Dos observadores se encuentran separados una distancia de 50 metros. Desde un acantilado a la posición A se mide un ángulo de depresión de 28° , mientras que el ángulo de elevación desde la posición B es de 70° . Determinar la distancia de cada observador al punto de mira P desde el acantilado.

Solución:

Representamos la situación en la siguiente figura.



Identificamos un triángulo con vértices en A , P y B . El ángulo en A mide 28° pues el segmento AB es paralelo a la línea que pasa por P , por lo que son **ángulos alternos internos**. El ángulo interno en P mide:

$$180^\circ - 70^\circ - 28^\circ = 82^\circ$$

Aplicamos la Ley de Senos para calcular la medida de a y b :

$$\frac{a}{\sin 28^\circ} = \frac{50}{\sin 82^\circ}$$

$$a = \frac{50 \sin 28^\circ}{\sin 82^\circ}$$

$$a = \frac{23.47}{0.99} = 23.7 \text{ m}$$

Para el ángulo b :

$$\frac{b}{\sin 70^\circ} = \frac{50}{\sin 82^\circ}$$

$$b = \frac{50 \sin 70^\circ}{\sin 82^\circ}$$

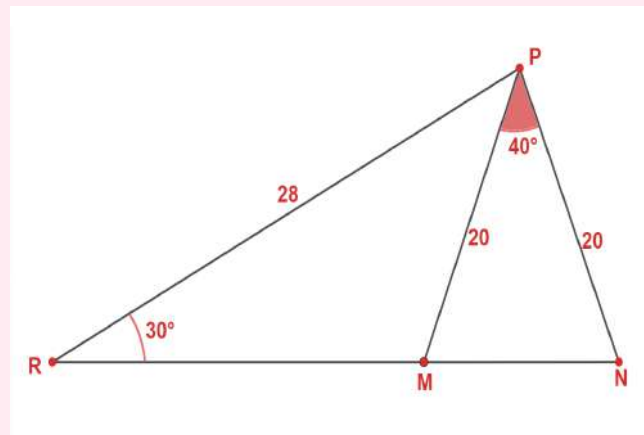
$$b = \frac{46.98}{0.99} = 47.45 \text{ m}$$

Respuesta:

La distancia del punto P al observador A es de 23.7 metros mientras que la distancia al observador B es de 47.45 metros.

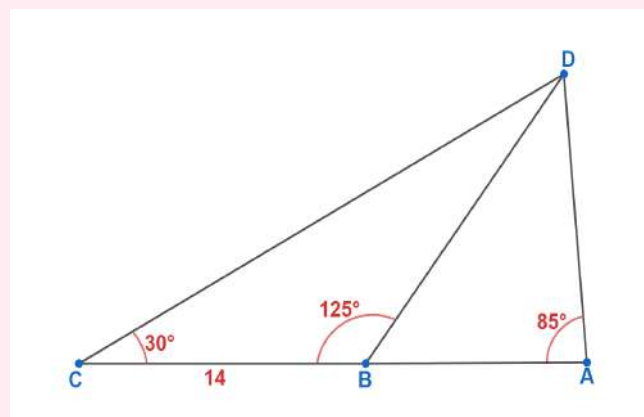
6.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. En la figura que se muestra, determinar la distancia RM y la distancia MN



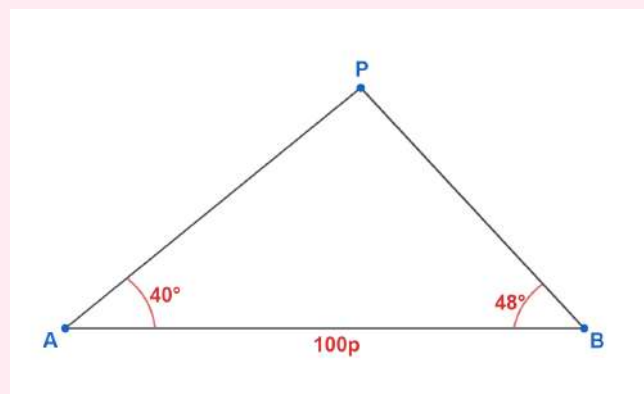
R/ $MN=13.68$ metros y $RM = 19.17$ metros

2. En el triángulo que se muestra, determinar la distancia de B a D y la distancia de A a D .



R/ $BD=16.67$ y $AD = 13.71$

3. Dos casas A y B se unican a 100 pies una de la otra. Un parque se ubica enfrente de ambas casas, se miden ángulos de 40° y 48° desde cada casa al parque. Determinar cuál de las casas está más cercana al parque y a qué distancia se encuentra.



R/ La casa más cercana al parque es la B , está a 64.93 pies.

4. Desde dos puntos ubicados en el suelo a 50 pies de distancia entre ellos, se miden ángulos de elevación hasta la parte más alta de un edificio, de 25° y 32° respectivamente. Determinar la altura del edificio.

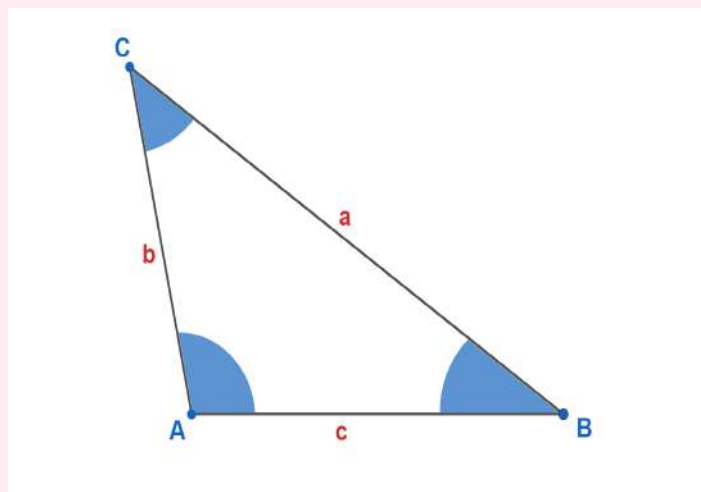
R/ La altura del edificio es de 93.31 pies.

5. Dos estaciones de combustible se encuentran en una playa recta a 10 km entre sí. Un barco informa su ubicación a las dos estaciones para determinar cuál le queda más cerca. Desde la Estación R lo observan con un ángulo de 41° y desde la estación S el ángulo es de 49° . ¿Cuál es la estación más cercana?

R/ La estación más cercana al barco es la S , se encuentra a 6.98 km.

7. Ley de cosenos

Este teorema es de aplicación general para cualquier triángulo con vértices en A , B y C y lados opuestos a los ángulos en cada vértice denotados por a , b , c ; como en la figura.



Se enuncia como:

*El cuadrado del lado de un triángulo es equivalente a la suma de los cuadrados de los otros dos lados **menos** el doble del producto de la longitud de los lados por el coseno del ángulo que forman.*

En forma matemática, para cada lado podemos expresar:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

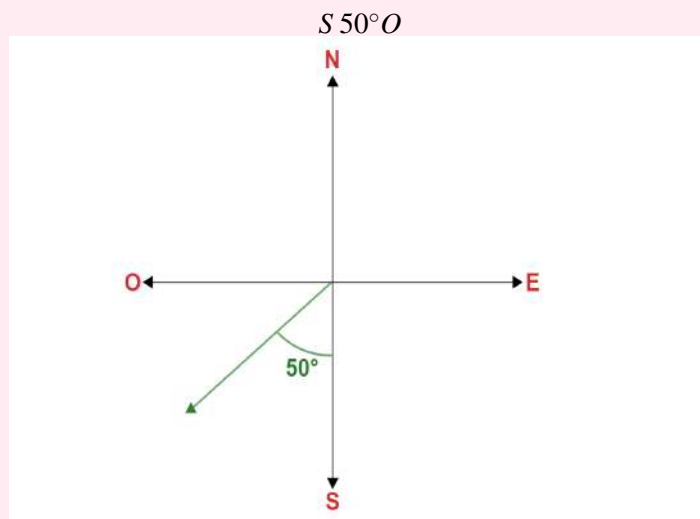
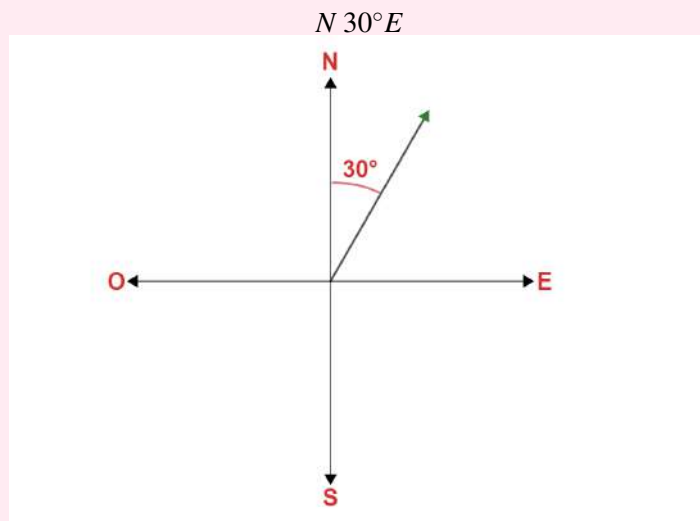
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

La Ley de Cosenos requiere para su aplicación contar con información de las medidas de dos lados y del ángulo entre ellos.

Algunas aplicaciones requieren la orientación con respecto a los puntos cardinales. Es común que la dirección se indique así:

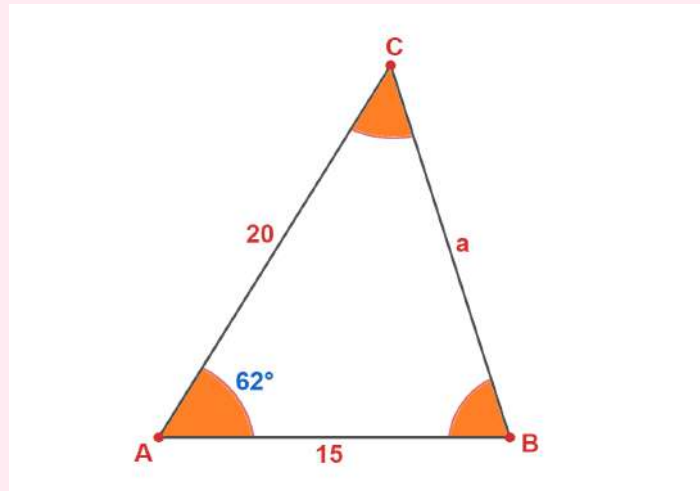
- Al inicio incluye *N* ó *S*, para establecer si el movimiento es hacia el Norte o hacia el Sur.
- Luego, se incluye el ángulo medido con respecto al eje *Y*.
- Se incluye *O* ó *E* para indicar si el movimiento es hacia el Oeste o hacia el Este.

Como ejemplo se tiene:



7.1 Ejercicios resueltos

1. En la figura que se muestra, determinar la medida del lado BC y el ángulo en B .



Solución:

Para determinar la medida del lado BC , que denotamos por a , aplicamos la Ley de Cosenos.

$$a^2 = 15^2 + 20^2 - 2(15)(20)\cos 62^\circ$$

$$a^2 = 225 + 400 - 600(0.47)$$

$$a^2 = 625 - 282$$

$$a^2 = 343$$

$$a = 18.52$$

Para calcular el valor del ángulo en B , podemos aplicar de nuevo la Ley de Cosenos o bien aplicar la Ley de Senos que ya estudiamos.

$$\frac{18.52}{\sin 62^\circ} = \frac{20}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{20 \sin 62^\circ}{18.52}$$

$$\sin B = 0.9535$$

Ahora, para determinar el ángulo B , usamos una calculadora:

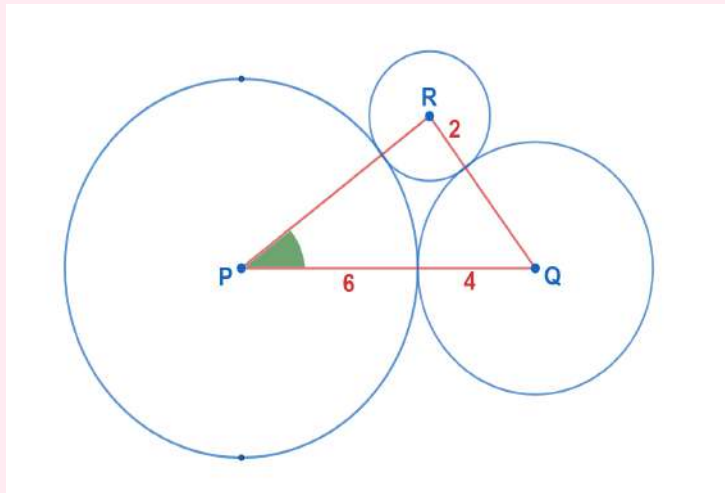
$$B = \sin^{-1}(0.9535)$$

$$B = 72.47^\circ$$

Respuesta:

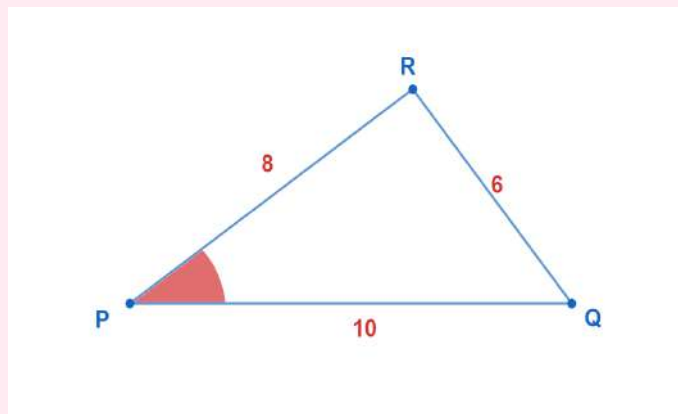
El lado BC del triángulo mide 18.52 unidades y el ángulo en B mide 72.47° .

2. Tres círculos de radios 2, 4 y 6 son tangentes entre sí, como se muestra en la figura. Determinar la medida del ángulo en P .



Solución:

En la figura dada, podemos observar que se forma un triángulo escaleno con vértices en los centros de los círculos: P , Q y R .



Pra calcular el ángulo en P , aplicamos la Ley de Cosenos:

$$6^2 = 8^2 + 10^2 - 2(8)(10)\cos P$$

$$36 = 164 - 160\cos P$$

$$-128 = -160\cos P$$

$$\cos P = \frac{128}{160} = 0.80$$

$$P = \cos^{-1}(0.8)$$

$$P = 36.87^\circ$$

Respuesta:

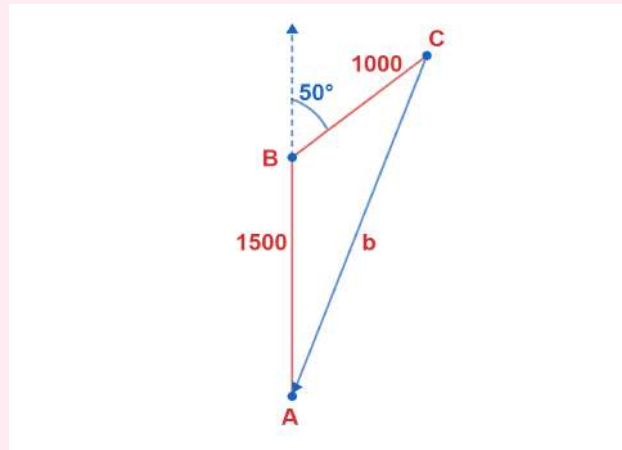
El ángulo en P mide 36.87° .

3. Un avión sale de la ciudad A y vuela 150km hacia el norte hasta la ciudad B . Luego recorre 1000km en la dirección $N50^\circ E$ y llega a la ciudad C .

Determinar la distancia que recorre en el vuelo directo de la ciudad C a la ciudad A .

Solución:

Iniciamos representando la situación dada en un esquema.



Visualizamos que en el triángulo con vértices en A , B y C , el ángulo en B es el suplemento de 50° por lo que $\angle B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Para calcular la distancia entre la ciudad C y la ciudad A , que denotamos por b , aplicamos la Ley de Cosenos.

$$b^2 = 1500^2 + 1000^2 - 2(1500)(1000)\cos 130^\circ$$

$$b^2 = 3250000 - 3000000(-0.64)$$

$$b^2 = 5170000$$

$$b = 2273.76$$

Respuesta:

En el vuelo directo de la ciudad C a la ciudad A , el avión recorre 2273.76 km.

.....

4. Un barco sale del punto P y navega a una velocidad de 60 mi/h con dirección $S20^\circ O$, durante 4 horas. Luego cambia su rumbo a $S80^\circ O$ y su velocidad a 80 mi/h durante las siguientes 5 horas. Determinar a qué distancia se encuentra el barco del puerto de salida después de 9 horas.

Solución:

Organizamos la información que se conoce:

$$v_1 = 60 \text{ mi/h}$$

$$t_1 = 4 \text{ h}$$

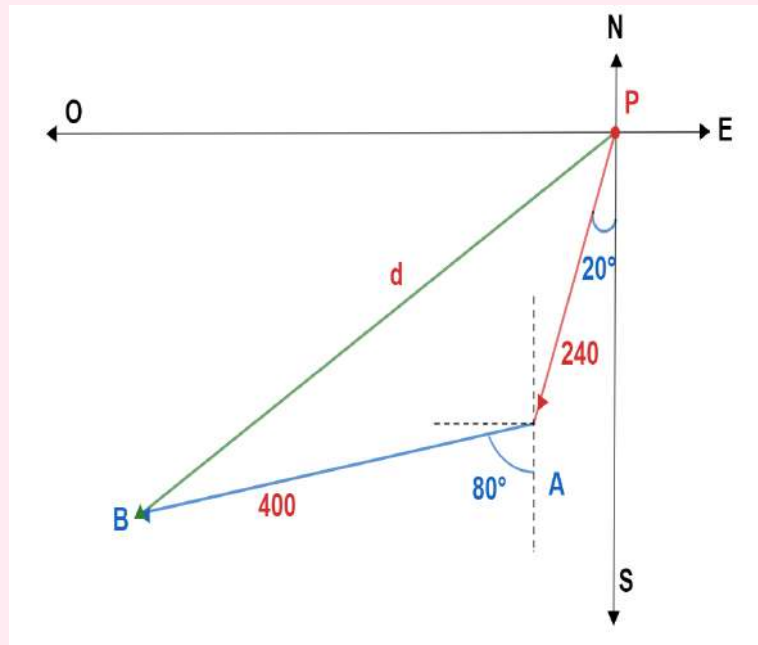
$$v_2 = 80 \text{ mi/h}$$

$$t_2 = 5 \text{ h}$$

Suponiendo que el movimiento es rectilíneo uniforme, calculamos la distancia a partir de: $v = \frac{d}{t} \Rightarrow d = vt$

$$d_1 = 60(4) = 240 \text{ mi} \quad d_2 = 80(5) = 400 \text{ mi}$$

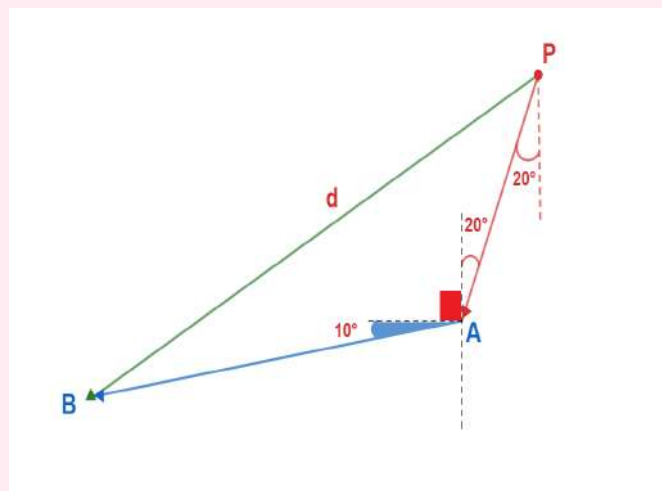
Podemos representar el movimiento del barco de la siguiente manera



Podemos observar un triángulo con dos lados conocidos de 240 y 400 uno desconocido d .

Para determinar la medida del ángulo entre los lados conocidos, notamos que el mismo está compuesto por la suma de:

complemento de $80^\circ + \text{ángulo recto} + \text{ángulo de } 20^\circ$



$$\angle A = 10^\circ + 90^\circ + 20^\circ = 120^\circ$$

Ahora podemos aplicar la Ley de Cosenos

$$d^2 = 240^2 + 400^2 - 2(240)(400) \cos 120^\circ$$

$$d^2 = 217600 - 192000(-0.5)$$

$$d^2 = 217600 + 96000$$

$$d^2 = 313600$$

$$d = 560$$

Respuesta:

El barco se encuentra a 560 millas del punto de embarque después de 9 horas de navegación.

.....

5. Un barco sale del puerto a las 10:00 a.m. y navega con rumbo $N 40^\circ E$ a velocidad de 60 mi/h, otro barco sale una hora después en dirección $S 60^\circ E$ y navega a 100 mi/h. Determinar la distancia entre los barcos a las 14:00 horas.

Solución:

Organizamos la información

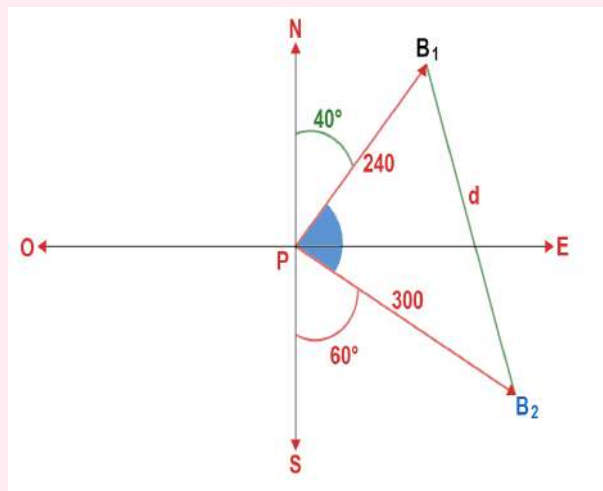
Barco 1

$$v_1 = 60 \text{ mi/h} \quad t_1 = 4 \text{ h} \quad d_1 = vt = 240 \text{ mi}$$

Barco 2

$$v_2 = 100 \text{ mi/h} \quad t_2 = 3 \text{ h} \quad d_2 = vt = 300 \text{ mi}$$

En la siguiente figura, representamos la situación:



En el triángulo con vértices en P, B₂ y B₁ el ángulo en P lo podemos expresar así:

$$\angle P = \text{complemento de } 40^\circ + \text{complemento de } 60^\circ$$

$$\angle P = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$

Para calcular la distancia d entre los barcos, aplicamos la Ley de Cosenos.

$$d^2 = 240^2 + 300^2 - 2(240)(300)\cos 80^\circ$$

$$d^2 = 147600 - 144000(0.17)$$

$$d^2 = 123120$$

$$d = 350.88$$

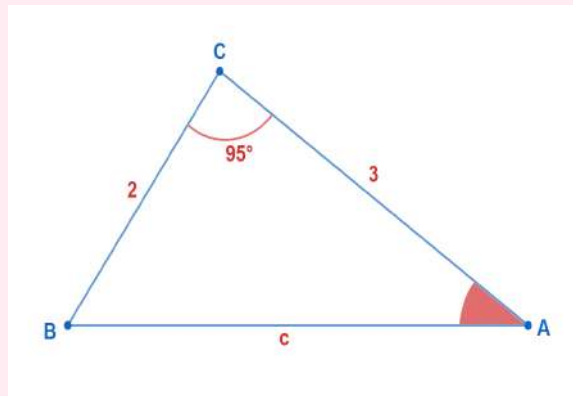
Respuesta:

A las 14:00 horas los barcos se encuentran a una distancia de 350.88 millas entre sí.

.....

7.2 Ejercicios para la autoevaluación

1. Con base en la siguiente figura, determine la medida del lado AB y del ángulo en A .



R/ El lado AB mide 3.46 y el ángulo A mide 35°

2. Dos personas salen de las casas A y B , alineadas en la misma calle, hacia un punto P en la acera de enfrente, entre ambas casas. El que sale de la casa A recorre 50 pies para llegar a P , mientras que el que sale de B , recorre 60 pies. En P , miden el ángulo entre las trayectorias es de 80° . Determinar la distancia entre las casas.

R/ La distancia entre las casas es de 71.12 pies

3. Dos lanchas salen juntas del mismo muelle. Una se mueve a 30 mi/h con dirección $S 43^\circ O$, mientras que la otra lleva una dirección $N 50^\circ O$ y navega a 24 mi/h. Determinar a qué distancia se encuentran las lanchas una de otra, hora y media después de que salieran.

R/ La distancia entre las lanchas después de una hora y media es de 56.14 millas.

4. Un barco sale del punto P y navega 30 millas en dirección $N 65^\circ O$, luego cambia de rumbo y navega 50 millas a $N 15^\circ E$, para llegar a su destino. Determinar:
- El ángulo entre las trayectorias.
 - La distancia entre el puerto y el destino final.

Ra/ El ángulo es de 100° . Rb/ El puerto y el destino final se encuentran a 62.62 millas entre sí.

5. Un avión debe volar 350 millas con dirección $N 70^\circ E$, pero para evitar una tormenta vuela hacia el este 55 millas. Determinar a qué distancia se encuentra el avión de su destino en ese momento.

R/ El avión se encuentra a 298.91 millas de su destino.



Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.