



Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala
Administración 2019-2023



Prepárate para estudiar Ingeniería
Fascículo I: Aritmética
Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
UNIDAD DE MODELACIÓN MATEMÁTICA E INVESTIGACIÓN



Prepárate para estudiar Ingeniería **Fascículo I: Aritmética**

Mtra. Inga. Mayra Virginia Carvajal Castillo

Revisado por:

Dra. Mayra Virginia Castillo Montes
Lic. William Adolfo Polanco Anzueto

Diagramación y estilo:

Br. Eugenio Miguel Polanco Sotoj

Guatemala, Noviembre de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA



JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Córdoba Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martínez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Kevin Vladimir Cruz Lorente
VOCAL V	Br. Fernando José Paz González
SECRETARIO	Ing Hugo Humberto Rivera Pérez.

DIRECTORA ESCUELA DE CIENCIAS	Inga. Soraya Martínez
COORDINADORA UMMI	Dra. Mayra Castillo



Índice general

1	Presentación	7
2	Números naturales	9
2.1	Operaciones aritméticas y sus propiedades	11
2.1.1	Ejercicios resueltos	13
2.1.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	17
2.2	Múltiplos y divisores	17
2.2.1	Ejercicios resueltos	18
2.2.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	26
2.3	Resolución de problemas	26
2.3.1	Ejercicios resueltos	26
2.3.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	31
3	Números enteros	33
3.1	Operaciones con números enteros y sus propiedades	34
3.1.1	Ejercicios resueltos	39
3.1.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	43
3.2	Resolución de problemas	43
3.2.1	Ejercicios resueltos	43
3.2.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	50
4	Números racionales	51
4.1	Operaciones y simplificación de números racionales	53
4.1.1	Ejercicios resueltos	57
4.1.2	Ejercicios Propuestos para autoevaluación	65

4.2	Resolución de problemas	66
4.2.1	Ejercicios resueltos	66
4.2.2	Ejercicios propuestos	72
5	Números reales	73
5.1	Operaciones con números reales	77
5.1.1	Ejercicios resueltos	79
5.1.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	83
5.2	Resolución de problemas	84
5.2.1	Ejercicios resueltos	84
5.2.2	Ejercicios propuestos para la autoevaluación	87
6	Números complejos	89
6.1	Operaciones con números complejos	90
6.1.1	Ejercicios resueltos	91
6.1.2	Ejercicios propuestos para autoevaluación	93
	Bibliografía	95

1. Presentación

La Decanatura de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se proyecta hacia la sociedad guatemalteca por medio de la generación de materiales de apoyo para el aprendizaje autónomo de las bases matemáticas que se requieren para estudiar una carrera de ingeniería o áreas afines.

Por ello, con base en resultados de estudios realizados a partir de 2019, la Unidad de Modelación Matemática e Investigación de la Escuela de Ciencias, elaboró siete fascículos que abarcan la temática considerada esencial para iniciar con éxito estudios de ingeniería. Con mucho agrado se pone a disposición de los interesados el documento titulado

Prepárate para estudiar Ingeniería ***Fascículo I: Aritmética***

Dicho documento contiene ejercicios resueltos y propuestos para la autoevaluación, que han sido tomados o adaptados de libros cuyas referencias se incluyen. Los propósitos son exclusivamente académicos y solo pretenden apoyar a los interesados en iniciar estudios superiores relacionados con la ingeniería y áreas afines, por lo que su divulgación no está relacionada con ninguna actividad lucrativa que perjudique los derechos de autor de la bibliografía consultada.

Por ser la primera versión del documento, el mismo no está exento de errores de digitalización, por lo que, durante la fase de validación con docentes y estudiantes, se documentarán las correcciones necesarias, para lo cual se recibirá comunicación en el correo: ummi@ingenieria.usac.edu.gt

Esperamos que estos aportes contribuyan a mejorar la formación matemática preuniversitaria de jóvenes guatemaltecos.

Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
Decana de la Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala



2. Números naturales

Muchas actividades que realiza el ser humano, requieren determinar cantidades de objetos o elementos, es decir, en la vida cotidiana es necesario contar objetos y representar cantidades. Para ello se utilizan los Números Naturales.

Muchos autores de libros de texto indican que el primer elemento de los números naturales es el 1. Sin embargo, dado que puede ocurrir que en ciertas situaciones no existan elementos, se considera conveniente aceptar que el 0 es un número natural, que representa la ausencia de cantidad, lo cual es un aporte de dos grandes civilizaciones: la hindú y la maya.

Entonces, se puede expresar que: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Una razón práctica para justificar que los naturales incluyen al cero, surge en conteos elementales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Qué número es el siguiente en el conteo? Sin duda la respuesta inmediata es: 10. Ahora, en el sistema de numeración de base 10, eso quiere decir: 1 decena y 0 unidades, lo que significa que se ha completado un grupo de 10 objetos (decena) y no hay unidades adicionales.

Otra ventaja que ofrece considerar al cero como un número natural es que permite representar otras situaciones sencillas, por ejemplo: si alguien tiene Q15.00 y gasta Q15.00, ¿Cuánto le queda? La respuesta es inmediata: nada. Esto se representa con el número cero.

Pero lo más interesante es lo siguiente: $1 - 1 = 0$, $2 - 2 = 0$, $10 - 10 = 0$ y en general, $x - x = 0$ para cualquier número natural x .

Ahora, veamos otras situaciones: $5 + 0 = 5$, $110 + 0 = 110$, $500 + 0 = 500$. Se observa que, si a distintos números naturales se le suma 0, la cantidad no cambia. Esta es una importante propiedad de la suma de números naturales, conocida como existencia de elemento neutro.

Las características de los números naturales, se comprenden a partir de “verdades generales” evidentes que se aceptan sin demostración, conocidos como Postulados de Peano:

- a) $0 \in \mathbb{N}$.
- b) Todo número natural n , tiene un sucesor que pertenece a $\mathbb{N}$, se denota por $n + 1$.
- c) 0 no es sucesor de ningún otro número natural.
- d) Dos números naturales diferentes, tienen sucesores diferentes.
- e) El conjunto de números naturales es ordenado.

Lo expresado anteriormente se basa en considerar al cero como el primer número natural y que todo número natural tiene un sucesor que es una unidad mayor; así se indica que siempre es posible representar el siguiente elemento del conjunto, por lo que se dice que este conjunto es infinito, pues la tendencia es a crecer de forma indefinida, se denota por ∞ .

Como ejemplo sencillo se tiene que: $0 < 1 < 2$, entonces 2 es sucesor de 1, 1 es sucesor de 0. También se puede decir, 0 es antecesor de 1, y 1 es antecesor de 2 y así sucesivamente, esto se entiende como un orden en todo el conjunto de los números naturales.

A los números naturales se les puede caracterizar por números pares e impares. Los números pares se generan al multiplicar por 2 los números naturales, por lo cual pueden representarse como $2n$, si n representa un número natural. Es fácil de observar que al ordenar los números naturales se tiene que el sucesor de un número par es impar, a la vez el sucesor de un impar es par; eso se resume diciendo que, si se conoce un número par $2n$, el sucesor es impar y tiene la forma $2n + 1$.

También resulta importante establecer que entre dos números pares (o impares) consecutivos hay dos unidades de diferencia: por ejemplo 12 y 14 son pares consecutivos y $14 - 12 = 2$; lo mismo ocurre por ejemplo con 33 y 35 que son impares consecutivos y la diferencia entre ellos es 2. Esto constituye la base conceptual que permitirá posteriormente representar situaciones como: la suma de varios números pares consecutivos o bien, de números impares consecutivos, como se indica a continuación para 3 pares y 3 impares:

$$(2n) + (2n + 2) + (2n + 2 + 2) = 6n + 6$$

$$(2n + 1) + (2n + 1 + 2) + (2n + 1 + 2 + 2) = 6n + 9$$

Más aún, si se conoce que la suma de tres números pares es 72, podemos escribir

$$6n + 6 = 72$$

$$6n + 6 = 66 + 6$$

$$6n = 66$$

Se trata de encontrar el número n que multiplicado por 6, sea 66. Los factores de 66 son: 66×1 , 33×2 , 22×3 , 11×6 . De esta forma se establece que $n = 11$. Por lo tanto, los números pares consecutivos que se buscan son:

$$2n = 2(11) = 22$$

$$2n + 2 = 2(11) + 2 = 24$$

$$2n + 2 + 2 = 2(11) + 2 + 2 = 26$$

Se propone como reto: si $2n$ representa un número par y $2n + 1$ representa un número impar, establecer una expresión para el resultado de las siguientes operaciones.

- a Suma de dos números pares. Suma de dos números impares. Suma de un número par con un número impar.
- b Producto de dos números pares. Producto de dos números impares. Producto de un número par y un número impar.

2.1 Operaciones aritméticas y sus propiedades

Las operaciones aritméticas básicas se estudian como procesos inversos: adición y sustracción, multiplicación y división, potenciación y radicación. Las nociones elementales indican que sumar es agregar mientras que restar es quitar; así mismo multiplicar es una suma abreviada mientras que dividir es una resta abreviada. La potenciación se relaciona con el producto de un número varias veces, mientras que la radicación se relaciona con calcular el número que se elevó a determinada potencia.

Adición	
Unicidad	El resultado de la suma de varios números naturales es único. En notación simbólica: Si $m + n = S_1$ y $m + n = S_2$, entonces $S_1 = S_2$
Cerradura	Al sumar números naturales, el resultado es un número natural. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b \in \mathbb{N}$
Conmutatividad	Al cambiar el orden de dos sumandos, el resultado es el mismo. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$
Asociatividad	Si se agrupan más de dos sumandos de distinta forma, el resultado es el mismo. En notación simbólica: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a + b) + c = a + (b + c)$
Existencia de elemento neutro	Si a cualquier número natural se le suma 0, el número no cambia. En notación simbólica: $\forall a \in \mathbb{N}, a + 0 = 0 + a = a$
Cancelación	Si la suma de un número natural a con un número n equivale a la suma de otro número b con n , entonces al cancelar n , resulta que a y b son iguales. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, \text{si } a + n = b + n \text{ entonces } a = b$

Multiplicación	
Unicidad	El resultado de la multiplicación de números naturales es único. En notación simbólica: Si $m \times n = P_1$ y $m \times n = P_2$, entonces $P_1 = P_2$
Cerradura	Al multiplicar números naturales, el resultado es un número natural. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \times b \in \mathbb{N}$
Conmutatividad	Al cambiar el orden de dos factores, el resultado es el mismo. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \times b = b \times a$
Asociatividad	Si se agrupan más de dos factores de distinta forma, el resultado es el mismo. En notación simbólica: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Existencia de elemento neutro	Si cualquier número natural se multiplica por 1, el número no cambia. En notación simbólica: $\forall a \in \mathbb{N}, a \times 1 = 1 \times a = a$
Cancelación	Si el producto de un número natural a por un número n equivale al producto de otro número b por n , entonces a y b son iguales, o $n = 0$. En notación simbólica: $\forall a, b \in \mathbb{N}, \text{si } a \times n = b \times n \text{ entonces } a = b \vee n = 0$
Distributividad sobre la suma	En notación simbólica: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Es importante notar que, las operaciones de sustracción y división no satisfacen la propiedad de cerradura en forma general: por ejemplo, si se efectúa $20 - 8$ el resultado es 12, que es otro número natural. Pero si se realiza $5 - 12$, el resultado no pertenece a los números naturales.

Un comportamiento similar ocurre con la división: por ejemplo si se efectúa $20 \div 4 = 5$, pero si se realiza $4 \div 3$ el resultado no es un número natural.

Propiedades de la Potenciación	
Unicidad	El resultado de la potenciación de un número natural es único Ej. $2^5 = 32$ siempre
Cerradura	Al elevar un número natural diferente de cero, a una potencia natural, el resultado es un número natural. En notación simbólica: $\forall a, m \in \mathbb{N}, a \neq 0, a^m \in \mathbb{N}$
Distributividad sobre la multiplicación	En notación simbólica: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, (a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de igual base, se eleva la base común a la suma de los exponentes. En notación simbólica: $\forall a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, a^m \times a^n = a^{m+n}$
Potencia de una potencia	Para elevar una potencia de un número natural a otra potencia, se eleva la base al producto de los exponentes. En notación simbólica: $\forall a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, (a^m)^n = a^{m \times n}$

Las propiedades de la radicación se estudiarán en las próximas secciones, pero es conveniente tener presente dos aspectos importantes:

- a La raíz de cualquier índice de un producto de factores equivale al producto de las raíces del mismo índice de todos los factores:

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}, a \times b \times c > 0 \text{ Si } n \text{ es par}$$

- b La propiedad anterior no aplica si se trata de la raíz de una suma o una diferencia, es decir:

$$\sqrt[n]{a + b + c} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$$

.....

Jerarquía de las operaciones

Para la realización de operaciones combinadas es importante considerar el orden de operación, pues de lo contrario se obtienen diferentes resultados.

Las operaciones aritméticas con números naturales se estudian en tres niveles de orden jerárquico:



Ese orden jerárquico indica las que se realizan primero, **si no aparecen signos de agrupación** como paréntesis, corchetes o llaves. Si aparecen operaciones de la misma jerarquía o nivel, se efectúan en el orden en que se presentan, por ejemplo: $100 \div 4 \times 2 + 3 = 53$. Ahora bien, si hay signos de agrupación, se realizan desde el interior hacia el exterior de las agrupaciones, por ejemplo: $100 \div (5 \times 2) + 4 = 100 \div (10) + 4 = 10 + 4 = 14$

La jerarquía descrita es un convenio establecido a partir de la lógica de las situaciones que representan las operaciones que se plantean, como ejemplo, se analiza una actividad cotidiana.

Una persona paga con un billete de Q 100.00 una compra de 3 paquetes de galletas de Q 10.00 cada uno, dos litros de refresco de Q 8.00 cada uno y una bolsa de chocolates de Q15.00. Se quedó con la tercera parte del cambio guardó el resto en su caja de ahorros. ¿Cuánto dinero ahorró?

Es necesario determinar cuánto gastó: $3(10) + 2(8) + 15$. Para obtener el total se realizan los productos primero y luego se efectúan las sumas. Para calcular el cambio que le dan al pagar con un billete de Q100.00, se escribe: $100 - [3(10) + 2(8) + 15]$. Finalmente, para calcular la tercera parte, se escribe:

$\{100 - [3(10) + 2(8) + 15]\} \div 3 = \{100 - [30 + 16 + 15]\} \div 3 = \{100 - [61]\} \div 3 = 39 \div 3 = 13$. Es decir, se queda con Q 13.00 y guarda en su caja de ahorro Q 26.00

.....

2.1.1 Ejercicios resueltos

1. Simplifique la siguiente expresión utilizando la jerarquía de operaciones.

$$8 + [9 - \{6 - (5 - 4)\}] + 14 - \{11 - [7 - (3 - 2)]\}$$

Solución:

Se identifican cuatro cantidades, dos necesitan simplificarse, por lo que se opera desde el interior hacia el exterior, efectuando operaciones indicadas en los paréntesis, corchetes y llaves.

Aplicando la jerarquía de las operaciones empezaremos por los paréntesis:

$$8 + [9 - \{6 - (1)\}] + 14 - \{11 - [7 - (1)]\}$$

Seguimos operando de adentro hacia afuera:

$$8 + [9 - \{5\}] + 14 - \{11 - [6]\}$$

Se eliminan los corchetes y llaves innecesarios

$$8 + [9 - 5] + 14 - \{11 - 6\}$$

Operamos nuevamente dentro de las llaves y los corchetes

$$8 + [4] + 14 - \{5\}$$

Eliminando los corchetes y llaves ahora innecesarios.

$$8 + 4 + 14 - 5$$

Finalmente, reducimos la expresión resultante.

$$8 + 4 + 14 - 5 = 21$$

Respuesta:

La expresión simplificada da como resultado 21.

.....

2. Simplifique la siguiente expresión

$$300 - 3(5 - 2) + (6 + 1)(9 - 3) + 4(8 + 1)$$

Solución:

Se identifican 4 cantidades, tres de las cuales deben simplificarse. Operaremos desde el interior hacia el exterior. Empezamos por el interior de los paréntesis.

$$300 - 3(3) + (7)(6) + 4(9)$$

Siguiendo la jerarquía de las operaciones, realizamos primero las multiplicaciones.

$$300 - 9 + 42 + 36$$

Finalmente, terminamos de simplificar la expresión:

$$300 - 9 + 42 + 36 = 369$$

Respuesta:

La expresión simplificada da como resultado 369.

.....

3. Simplifique la siguiente expresión

$$(32 - 16 - 8) \div 8 + 16 \div 4 * 2 + 16 \div (4 * 2)$$

Solución:

Se identifican 3 cantidades, todas ellas necesitan simplificarse. Empezaremos desde el interior hacia el exterior. Luego aplicaremos la jerarquía de las operaciones. Empezamos entonces por los paréntesis.

$$(8) \div 8 + 16 \div 4 * 2 + 16 \div (8)$$

Ahora por su mayor jerarquía realizamos las divisiones.

$$1 + 4 * 2 + 2$$

Siguiendo la jerarquía de las operaciones, continuamos con la multiplicación.

$$1 + 8 + 2$$

Finalmente, realizamos las sumas

$$1 + 8 + 2 = 11$$

Respuesta:

La expresión simplificada da como resultado 11.

.....

4. Simplifique la siguiente expresión

$$500 - \{(6 - 1)8 \div 4 * 3 + 16 \div (6 + 2)\} - 5$$

Solución:

Se identifican 3 cantidades, una de ellas necesita simplificarse. Empezaremos desde el interior hacia el exterior. Luego aplicaremos la jerarquía de las operaciones. Empezamos por los paréntesis.

$$500 - \{(5)8 \div 4 * 3 + 16 \div (8)\} - 5$$

Seguimos con las operaciones que involucran a los paréntesis

$$500 - \{40 \div 4 * 3 + 2\} - 5$$

Ahora, realizamos la división

$$500 - \{10 * 3 + 2\} - 5$$

Por la jerarquía realizamos la multiplicación

$$500 - \{30 + 2\} - 5$$

Ahora realizamos la suma dentro de las llaves

$$500 - \{32\} - 5$$

Finalmente, simplificamos las cantidades resultantes.

$$500 - 32 - 5 = 463$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión da como resultado 463.

.....

5. Simplifique la siguiente expresión

$$40 \div 5 * 5 + 6 \div 2 * 3 + 4 - 5 * 2 \div 10$$

Solución:

Como podemos observar, en la expresión no aparece ningún signo de agrupación, por lo mismo el orden de operación está dado por la jerarquía de las operaciones. Tendrán prioridad entonces la división y la multiplicación.

En el caso en que se tengan multiplicaciones y divisiones juntas se realizará la operación en el orden en que aparecen, por tener la misma jerarquía.

$$8 * 5 + 3 * 3 + 4 - 10 \div 10$$

Seguimos con las multiplicaciones y divisiones.

$$40 + 9 + 4 - 1$$

Finalmente, terminamos de simplificar sumando y restando.

$$40 + 9 + 4 - 1 = 52$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión da como resultado 52.

.....

6. Simplifique la siguiente expresión

$$3^2 \sqrt{36} + (6 \div 3 + 2)^2 [(35 - 7) \div 14]$$

Solución:

Se identifican dos expresiones, ambas necesitan ser simplificadas. Empezaremos desde el interior hacia el exterior siguiendo la jerarquía de las operaciones.

$$3^2 \sqrt{36} + (2 + 2)^2 [(28) \div 14]$$

Seguimos simplificando dentro de los paréntesis y corchetes, al mismo tiempo operamos la raíz y la potencia.

$$9 * 6 + (4)^2[2]$$

Multiplicamos y aplicamos las potencias nuevamente:

$$54 + 16[2]$$

$$54 + 32 = 86$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión da como resultado 86.

.....

2.1.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

- a) $250 - [(6 + 4) - (3 - 1) + 2] + \{16 - [(8 + 3) - (12 - 10)]\}$ **R/ 247**
- b) $500 + 6(3 + 1) + (8 - 5)3 - 2(5 + 4)$ **R/ 515**
- c) $(9 + 3)5 - 2 \div (3 - 2) + (8 * 6) \div 4 \div 2 + 5$ **R/ 69**
- d) $9 + 5 - 4 + 3 - 8 + 5 * 3 - 20 \div 4 * 3$ **R/ 5**
- e) $3(5)^2 + 4(3)^3 + (6 \div 2 * 5)^2 - \sqrt{49}$ **R/ 401**
- f) $20 - 10 \div 5 + (7 - 4)^2(15 - 10 \div 2) + 72 \div 18 * 4$ **R/ 124**

2.2 Múltiplos y divisores

Los múltiplos de un número se generan al multiplicar los números naturales por dicho número. Dado

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, se construyen como ejemplos los múltiplos de 2, 3 y 4.

- Múltiplos de 2 o números pares: $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$
- Múltiplos de 3: $M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$
- Múltiplos de 4: $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$

Un proceso para obtener los múltiplos comunes diferentes de cero, es identificar la intersección de los múltiplos de cada uno de los números que interesan. Por ejemplo los múltiplos comunes diferentes de cero de 2 y 3 son: $M(2) \cap M(3) = \{6, 12, 18, \dots\}$ El mínimo de los múltiplos comunes (mcm) es 6.

Una regla práctica para encontrar el mínimo común múltiplo de varios números, se basa en descomponerlos por separado en sus factores primos, luego se **multiplican los factores comunes y no comunes, con el mayor exponente** que presenten. Una alternativa, es descomponerlos en factores primos de forma conjunta, dejando invariante el número si no comparte un factor primo en particular. El proceso concluye hasta que todos los números se descompongan en la unidad.

Los **divisores** de un número natural son números naturales que al dividirlo se obtiene un residuo cero, por lo que se dice que la división es exacta. Los **números** naturales que son **primos**, solo son divisibles por ellos mismos y la unidad. Algunos ejemplos son: 2, 3, 5, 7, 13, 19. Puede listar 10 números primos más.

Como ejemplos, los divisores de 12 son aquellos números naturales que al dividir 12 entre ellos, el residuo es cero: 12, **1**, 6, **2**, 3, **4**. Los divisores de 20 son: 20, **1**, 10, **2**, 5, **4**.

Los divisores comunes de 12 y 20, son: 1, 2, 4. El valor máximo de los divisores comunes es 4. Por lo que se puede afirmar que el **Máximo común divisor** (MCD) es 4.

Una regla práctica consiste en descomponer por separado los números en sus factores primos. El MCD se calcula por medio de **la multiplicación de los factores primos comunes con su menor exponente**. También este procedimiento, tiene una forma alternativa: se extraen de forma conjunta solamente los factores primos comunes a todos, luego se multiplican dichos factores.

Algunos principios de divisibilidad

- a) Si un número es divisor de varios números, entonces también es divisor de la suma.
Ej. 3 es divisor de 15, de 24 y 27, entonces es divisor de $66 = 15 + 24 + 27$
- b) Si un número es divisor de dos números, también es divisor de su diferencia. Ej. 4 es divisor de 40 y de 24, entonces es divisor de $16 = 40 - 24$
- c) Si un número es divisor de otro número, también es divisor de sus múltiplos. Ej. 5 es divisor de 20, entonces es divisor de 40, 60, 80, 400, etc.
- d) Si un número divide a otro, entonces divide a sus potencias. Ej. 2 es divisor 10, entonces es divisor de 10^2 , 10^4 , 10^6 , etc.

2.2.1 Ejercicios resueltos

1. Hallar el mínimo común múltiplo de 32, 48 y 108

Solución:

Para poder encontrar el mínimo común múltiplo de los tres números, primero debemos descomponer cada uno en sus factores primos.

32	2	48	2	108	2
16	2	24	2	54	2
8	2	12	2	27	3
4	2	6	2	9	3
2	2	3	3	3	3
1		1		1	

Se expresa cada número como producto de sus factores:

$$32 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^5$$

$$48 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 = 2^4 * 3^1$$

$$108 = 2 * 2 * 3 * 3 * 3 = 2^2 * 3^3$$

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$mcm(32, 48, 108) = 2^5 * 3^3 = 32 * 27 = 864$$

Respuesta:

El mínimo común múltiplo de 32, 48 y 108 es 864.

2. Hallar el mínimo común múltiplo de 15, 16, 48, 150

Solución:

Para poder encontrar el mínimo común múltiplo de los cuatro números primero debemos descomponer cada uno en sus factores primos.

15	3	16	2	48	2	150	2
5	5	8	2	24	2	75	3
1		4	2	12	2	25	5
		2	2	6	2	5	5
		1		3	3	1	
				1			

Se expresa cada número como producto de sus factores:

$$15 = 3^1 * 5^1 = 3 * 5$$

$$16 = 2 * 2 * 2 * 2 = 2^4$$

$$48 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 = 2^4 * 3^1$$

$$150 = 2 * 3 * 5 * 5 = 2^1 * 3^1 * 5^2$$

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$mcm(15, 16, 48, 150) = 2^4 * 3^1 * 5^2 = 16 * 3 * 25 = 1200$$

Otra opción es realizar la descomposición de los números en sus factores primos de forma simultánea; hasta que todos sean uno. Si el factor no aplica a algún número se deja igual.

15	16	48	150	2
15	8	24	75	2
15	4	12	75	2
15	2	6	75	2
15	1	3	75	3
5		1	25	5
1			5	5
			1	

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$mcm(15, 16, 48, 150) = 2^4 * 3^1 * 5^2 = 16 * 3 * 25 = 1200$$

Respuesta:

El mínimo común múltiplo de 15, 16, 48 y 150 es 1200.

3. Hallar el máximo común divisor de 425, 800 y 950

Solución:

Para encontrar el mínimo común múltiplo de los tres números podemos descomponer en factores primos por separado cada número

425	5	800	2	950	2
85	5	400	2	475	5
17	17	200	2	95	5
1		100	2	19	19
		50	2	1	
		25	5		
		5	5		
		1			

Se expresa cada número como producto de sus factores:

$$425 = 5 * 5 * 17 = 5^2 * 17$$

$$800 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 5 * 5 = 2^5 * 5^2$$

$$950 = 2 * 5 * 5 * 19 = 2 * 5^2 * 19$$

El factor común es $5^2 = 25$, .

El $MCD(425, 800, 950) = 25$

Otra manera de encontrar el MCD es por medio de los factores primos calculados simultáneamente. Dado que los tres números no son divisibles entre 2, 3 y 4 tendremos lo siguiente

425	800	950	5
85	160	190	5
17	32	28	

No hay más factores comunes pues 17 es primo. Por lo que el MCD será el siguiente:

$$MCD(425, 800, 950) = 5 * 5 = 5^2 = 25$$

Respuesta:

El máximo común divisor de 425, 800 y 950 es 25.

.....

4. Hallar el máximo común divisor de 120, 40, 88, 160

Solución:

Para poder encontrar el mínimo común múltiplo de los tres números, primero debemos descomponer cada uno en sus factores primos.

120	2	40	2	88	2	160	2
60	2	20	2	44	2	80	2
30	2	10	2	22	2	40	2
15	3	5	5	11	11	20	2
5	5	1		1		10	2
1						5	5
						1	

Se expresa cada número como producto de sus factores:

$$120 = 2 * 2 * 2 * 3 * 5 = 2^3 * 3 * 5$$

$$40 = 2 * 2 * 2 * 5 = 2^3 * 5$$

$$88 = 2 * 2 * 2 * 11 = 2^3 * 11$$

$$160 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 5 = 2^5 * 5$$

Hay que notar que el único factor común primo es 2 por lo que el máximo común divisor es:

$$MCD(120, 40, 88, 160) = 2^3 = 8$$

La técnica resumida se aplicará de forma conjunta, encontrando solamente los factores primos en común.

120	40	88	160	2
60	20	44	80	2
30	10	22	40	2
15	5	11	20	2

Dado que no tienen más factores primos comunes el máximo común denominador es $2^3 = 8$

Respuesta:

El máximo común divisor de 120, 40, 88 y 160 es 8.

5. Tres aviones salen de la misma ciudad; el primero cada 8 días, el segundo cada 10 días y el tercero cada 20 días. ¿En cuánto tiempo coincidirán los tres aviones en salir de la misma ciudad?

Solución:

Hay que encontrar el mínimo común múltiplo:

Avión 1:	8, 16, 24, 32, 40 , 48
Avión 2:	10, 20, 30, 40 , 50, 60
Avión 3:	20, 40 , 60, 80, 100

Se puede observar que coincidirán de nuevo en salir de la misma ciudad en cuarenta días. Otra forma de encontrar el mcm es por medio de los factores primos de las tres cantidades.

8	10	20	2
4	5	10	2
2	5	5	2
1	5	5	5
	1	1	

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$mcm(8, 10, 20) = 2 * 2 * 2 * 5 = 2^3 * 5 = 8 * 5 = 40$$

Respuesta:

Los tres aviones vuelven a coincidir en su salida de la misma ciudad después de 40 días.

.....

6. Si las flores de una canasta se venden por docena sobraría una flor, lo mismo pasaría si se vendieran ramos con docena y media o con dos docenas. Si hay menos de 80 flores, ¿cuántas flores hay en la canasta?

Solución:

El mínimo de flores es un múltiplo común de 12, 18 y 24, pero aumentado en 1, para que se cumpla la condición de que sobre una flor. Por lo tanto debemos hallar el mcm de 12, 18 y 24

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
	1		

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$mcm(12, 18, 24) = 2 * 2 * 2 * 3 * 3 = 2^3 * 3^2 = 8 * 9 = 72$$

Entonces en total hay $72 + 1 = 73$ flores.

Respuesta:

En la canasta habían 73 flores.

.....

7. Si un grupo de alumnos se divide en dos secciones, sobra uno, lo mismo sucede si se forman 2, 3, 4, 5 o 6 secciones. Al fin, al distribuirlos en 7 secciones no sobra ninguno. ¿Cuántos alumnos hay en todo el grupo si se sabe que no superan los 310?

Solución:

Como al dividir el grupo en 2, 3, 4, 5 o 6 secciones sobra 1, sabemos que no es múltiplo de estos números, pero hay que encontrar el mínimo común múltiplo para identificar otros múltiplos a los que se pueda sumar 1. Encontramos entonces el mínimo común múltiplo

$$\begin{array}{cccccc|c}
 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\
 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\
 & 3 & 1 & 5 & 3 & 3 \\
 & & 1 & 5 & 1 & 5 \\
 & & & 1 & &
 \end{array}$$

El mínimo común múltiplo es el producto de factores comunes y no comunes con su mayor exponente:

$$m.c.m.(2, 3, 4, 5, 6) = 2 * 2 * 3 * 5 = 2^2 * 3 * 5 = 4 * 3 * 5 = 60$$

Ahora escribimos los múltiplos de 60 menores a 310

$$60 \quad 120 \quad 180 \quad 240 \quad 300$$

Para garantizar que sobre 1 al dividir por 2, 3, 4, 5 o 6, sumamos una unidad a cada número.

$$61 \quad 121 \quad 181 \quad 241 \quad 301$$

Solo falta establecer cuál de los 5 números es múltiplo de 7, es decir, que al dividir entre 7, el residuo sea 0.

$$\begin{array}{ll}
 61 \div 7 & \text{Residuo 5} \\
 121 \div 7 & \text{Residuo 2} \\
 181 \div 7 & \text{Residuo 6} \\
 241 \div 7 & \text{Residuo 3} \\
 301 \div 7 & \text{Residuo 0}
 \end{array}$$

El número que buscamos es entonces 301.

Respuesta:

El grupo está compuesto por 301 estudiantes.

8. Hallar dos números cuyo producto es 120 y su suma es 23

Solución:

Descomponemos 120 en factores primos y luego analizamos para cuáles de ellos se cumple que la suma es 23.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Así, tenemos lo siguiente:

$$120 = 2 * 2 * 2 * 3 * 5 = 2^3 * 3 * 5$$

120 se puede expresar como:

$$\begin{aligned} 60 \times 2 \\ 30 \times 4 \\ 15 \times 8 \\ 5 \times 24 \end{aligned}$$

De estos, los que cumplen con tener una suma igual a 23 son 15 y 8.

Respuesta:

Los dos números buscados son 15 y 8.

.....

9. Dos rollos de alambre para la conducción eléctrica de 36 y 48 metros de longitud se quieren dividir en pedazos de igual longitud del mayor tamaño posible. ¿Cuántos fragmentos se obtendrán en total? ¿De qué tamaño deben cortarse los pedazos para utilizar los dos rollos de alambre completos?

Solución:

Es necesario determinar, cuál es el la mayor longitud común que deben tener los fragmentos de alambre para que no sobre ni falte nada.

Hallamos el máximo común divisor de 48 y 36

48	36	2
24	18	2
12	9	3
4	3	

No tienen más factores comunes, así que el máximo común divisor de 36 y 48 es:

$$MCD(36, 48) = 2^2 * 3 = 4 * 3 = 12$$

La longitud mayor de los fragmentos es de 12 metros.

Del rollo de 48 metros se obtendría el siguiente número de fragmentos:

$$\frac{48}{12} = 4$$

Del rollo de 36 metros se obtendría el siguiente número de fragmentos:

$$\frac{36}{12} = 3$$

En total se obtienen 7 fragmentos de 12m de longitud.

Respuesta:

Se deben cortar fragmentos de 12 metros de longitud para utilizar todo el alambre, obteniendo 7 fragmentos en total.

.....

10. El área de un rectángulo mide $720m^2$ y su perímetro mide 106m. Si se sabe que sus dimensiones son números naturales. Hallar el largo y el ancho.

Solución:

El área de un rectángulo está dada por la multiplicación de su largo por su ancho.

$$A = l \times a$$

Sabemos que el área $A = 720m^2$, entonces debemos hallar dos números cuyo producto sea 720.

Descomponiendo 720 en sus factores primos obtenemos:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

720 se puede expresar como:

360×2	180×4
90×8	45×16
15×48	5×144
72×10	120×6

Sabemos que el perímetro es de 106 y puede calcularse de la siguiente forma:

$$P = 2l + 2a = 2(l + a)$$

Por lo tanto, 106 es el doble de la suma del largo y el ancho. La suma del ancho y el largo es entonces:

$$\frac{106}{2} = 63$$

Ahora busquemos entre los factores previamente encontrados, cuáles de ellos suman 63.

Los números que suman 63 son 48 y 15.

Respuesta:

El rectángulo dado tendrá dimensiones de 45 metros y 16 metros.

2.2.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Hallar el mínimo común múltiplo de 18, 24 y 40. **R/ 360**
2. Hallar el mínimo común múltiplo de 14, 28, 30 y 120. **R/ 840**
3. Hallar el máximo común divisor de 12, 16 y 28. **R/4**
4. Hallar el máximo común divisor de 80, 40 y 180. **R/20**
5. Hallar dos números naturales cuya diferencia es 12 y su producto es 160. **R/20 y 8**
6. Hallar las dimensiones de un rectángulo que tiene un metro más de largo que de ancho, y su área es de $756m^2$ **R/Las dimensiones son 27m y 28m**
7. Un ciclista tarda 8 minutos en dar una vuelta a una pista, mientras que otro tarda 12 minutos. Si salen al mismo tiempo, ¿cuántas veces se encontrarán en la salida durante la hora que dura el entrenamiento? **R/Coinciden 2 veces, a los 24 y a los 48 minutos**
8. Una cartulina de dimensiones 72cm de largo y 45cm de ancho, se va a cortar en cuadrados sin desperdiciar material. ¿Cuál es la mayor longitud de lado de los cuadrados? **R/ El lado del cuadrado de mayor longitud es 9**
9. Una industria que fabrica jabón detergente, lo coloca en 3 cajas que contienen 1600 libras, 2000 libras y 3392 libras, respectivamente. El jabón contenido en cada caja está empacado en bolsas de igual peso, que es el mayor posible. a) ¿Cuánto pesa cada bolsa? b) ¿Cuántas bolsas hay en cada caja y en total? **Ra/Cada bolsa pesa 16lb; Rb/ Las cajas tienen 100, 125 y 212 bolsas, respectivamente; 437 bolsas en total**
10. Una persona utiliza una aplicación que permite calcular el número de pasos. Para determinar la mayor longitud posible de sus pasos, realiza tres pruebas, caminando en el mismo tiempo, 650cm. 800 cm y 1000cm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de sus pasos? **R/ La mayor longitud posible de sus pasos es 50cm**

2.3 Resolución de problemas

2.3.1 Ejercicios resueltos

1. Si Andrés tuviera Q17 menos, tendría Q18. Si Boris tuviera Q15 más, tendría Q38. Si Carlos tuviera Q5 menos, tendría Q10 más que Andrés y Boris juntos. Si Denis tuviera Q18 menos, tendría Q9 más que la diferencia entre la suma de lo que tienen Boris y Carlos menos lo de Andrés. ¿Cuánto tienen los 4?

Solución:

Lo primero que debemos hacer es trasladar la información a su equivalente en operaciones matemáticas:

$$Andres - 17 = 18$$

$$Boris + 15 = 38$$

$$Carlos - 5 = 10 + (Andres + Boris)$$

$$Denis - 18 = 9 + [(Boris + Carlos) - Andres]$$

Ahora podemos empezar a simplificar para encontrar la cantidad de dinero que tiene cada uno. Empezaremos por Andrés:

$$Andres - 17 = 18$$

$$Andres = 18 + 17 = 35$$

Con esto encontramos que Andrés tiene Q35, pasamos entonces a analizar la situación de Boris:

$$Boris + 15 = 38$$

$$Boris = 38 - 15 = 23$$

Ahora que sabemos que Boris tiene Q23, podemos calcular cuánto dinero tiene Carlos:

$$Carlos - 5 = 10 + (Andrs + Boris)$$

$$Carlos - 5 = 10 + (35 + 23)$$

$$Carlos = 10 + (35 + 23) + 5 = 15 + (58) = 73$$

Carlos tiene Q73, por lo tanto Denis tendrá lo siguiente:

$$Denis - 18 = 9 + [(Boris + Carlos) - Andrs]$$

$$Denis - 18 = 9 + [(23 + 73) - 35]$$

$$Denis = 9 + [(23 + 73) - 35] + 18 = 27 + [(96) - 35] = 27 + [61] = 88$$

Encontramos que Denis tiene Q88, finalmente calcularemos cuánto dinero tienen los cuatro.

$$Total = Andrs + Boris + Carlos + Denis$$

$$Total = 35 + 23 + 73 + 88 = 219$$

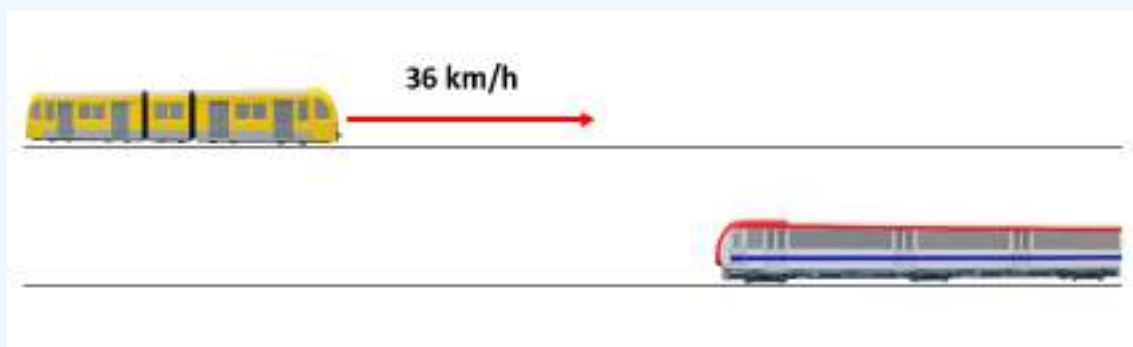
Respuesta:

Entre los cuatro tienen Q219.

2.Un viajero se asoma a la ventanilla de un tren que va a 36 km/h, observa que un tren detenido en una vía adyacente pasa ante él en 12 segundos. ¿Cuál será la longitud de este tren?

Solución:

Lo primero que debemos hacer es realizar un esquema de la situación



El tren en movimiento se mueve hacia el tren detenido, al alcanzarlo se tarda 12 segundos en pasar frente a éste. Podemos calcular la longitud del tren detenido utilizando la velocidad del tren en movimiento y el tiempo que le toma pasar frente al mismo.

Es necesario igualar las dimensionales de los datos dado que tenemos una velocidad en km/h y un tiempo en segundos, para poder compararlas las igualaremos.

$$V = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} * \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 10\text{m/s}$$

Ahora que tenemos la información en las mismas dimensionales procedemos a calcular la longitud del tren detenido, utilizando la siguiente relación:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}}$$

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} * \text{Tiempo}$$

La distancia o longitud del tren detenido, que recorre el tren en movimiento es:

$$\text{Distancia} = 10\text{m/s} * 12\text{s} = 120\text{m}$$

Respuesta:

El tren detenido tiene una longitud de 120 metros.

.....

3.El producto de dos números es 7533 y uno de los números es 81. ¿ En cuánto excede el doble de la suma de los dos números a la mitad de su diferencia?

Solución:

Se tienen dos numeros naturales, dado que sabemos que uno de ellos es 81, podemos calcular el otro utilizando el valor de su producto:

$$7533 = 81 * N_2$$

$$N_2 = 7533/81 = 93$$

Ahora sabemos que los dos números son 81 y 93, podemos realizar los cálculos indicados.

$$\text{Suma} = 81 + 93 = 174$$

$$Diferencia = 93 - 81 = 12$$

La operación deseada es calcular en cuánto excede el doble de la suma de los dos números a la mitad de su diferencia.

$$\begin{aligned} Operacion &= 2(Suma) - \frac{Diferencia}{2} \\ Operacion &= 2(174) - \frac{12}{2} = 348 - 6 = 342 \end{aligned}$$

Respuesta:

El doble de la suma de los dos números excede en 342 a la mitad de su diferencia.

.....

4. Un ganadero compra 40 caballos a Q10,000 cada uno y por cada 10 que compra recibe uno de regalo. En mantenerlos ha gastado Q60,000. Si los vende todos a Q424,800, ¿gana o pierde por cada caballo?

Solución:

El primer paso es determinar la cantidad total de caballos que adquirió el ganadero. Recordemos que por cada 10 que compra, recibe uno gratis. Dado que compró 40 caballos, el número de caballos extra será:

$$C_E = \frac{40}{10} = 4$$

El total de caballos de los que el ganadero se hizo cargo fue de 44 caballos. Ahora pasamos a calcular el costo de los caballos que compró:

$$C_C = 10,000 * 40 = 400,000$$

El costo de mantener a todos los caballos fue de Q.60,000, por lo que el costo total será:

$$C_T = C_C + C_M = 400,000 + 60,000 = 460,000$$

Ahora que sabemos que el costo total fue de Q460,000, podemos determinar si se tuvieron ganancias o pérdidas. La diferencia será:

$$D = C_T - G = 460,000 - 424,800 = 35,200$$

El ganadero perdió Q35,200 en total, dado que tenía 44 caballos la pérdida por cada uno fue:

$$P_C = \frac{35200}{44} = 800$$

Respuesta:

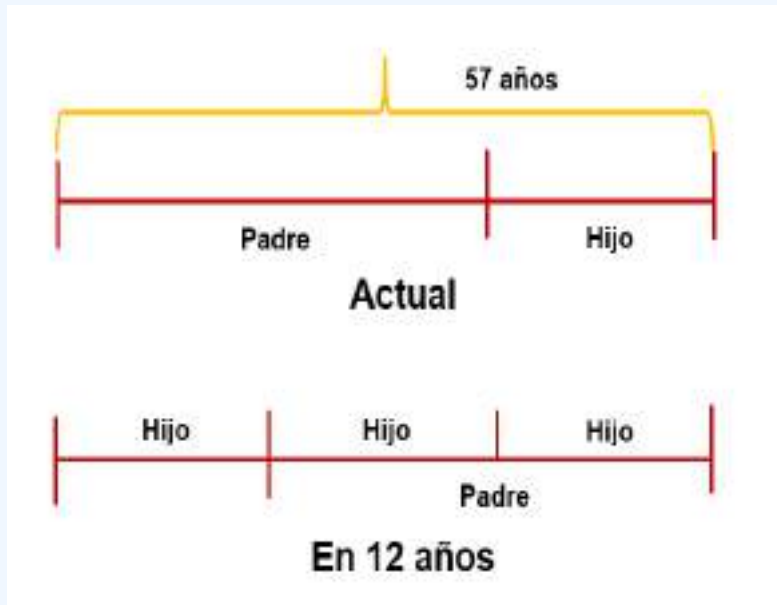
El ganadero perdió un total de Q35,200; Q800 por cada caballo.

.....

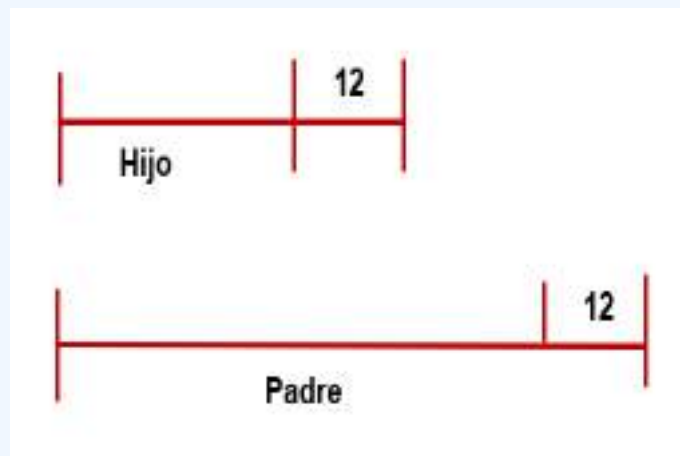
5. La edad de un padre y de su hijo suman 57 años, si dentro de 12 años la edad del padre será el doble de la edad del hijo, determinar las edades actuales de ambos.

Solución:

Para resolver el problema empezaremos por realizar un esquema de la situación.



También podemos decir que al pasar 12 años las edades del padre y el hijo serán:



Tendremos entonces que en 12 años, sus edades sumarán lo siguiente:

$$\text{Edad hijo} + 12 + \text{Edad Padre} + 12$$

Reordenando

$$\text{Edad hijo} + \text{Edad Padre} + 12 + 12$$

Se conoce que las edades del padre y el hijo suman 57 años, podemos reescribir la expresión como:

$$57 + 12 + 12 = 81$$

Esta será la suma de las edades en 81 años. Es decir, dentro de 12 años, la suma será tres veces la edad del hijo, que se calcula así:

$$81 \div 3 = 27$$

La edad del hijo en 12 años será 27 años. En la actualidad sería:

$$27 - 12 = 15$$

En la actualidad el hijo tienen 15 años, con esto podemos calcular la edad del padre:

$$57 - 15 = 42$$

La edad actual del padre es 42 años.

Respuesta:

En la actualidad el padre tiene 42 años y el hijo tiene 15 años.

.....

2.3.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Un constructor contrata un obrero por 80 días ofreciéndole Q50.00 por cada día que trabaje y Q30.00 por cada día que a causa de la lluvia, no pueda trabajar. Al cabo de 80 días el obrero ha recibido Q3,500.00 ¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó?

Respuesta: El obrero trabajó 55 días y no trabajó 25 días.

2. La suma de la edad de un padre y su hijo es 75 años y el padre tiene el doble de la edad del hijo. Determinar ambas edades.

Respuesta: El hijo tiene 25 años y el padre tiene 50 años.

3. Si se multiplican dos números el resultado es 782, pero si por error uno de ellos termina en 1 en lugar de 3, el resultado es 714. ¿Cuáles son los números?

Respuesta: Los números son 23 y 34

4. Hallar dos ángulos suplementarios cuyas medidas corresponden a dos números impares consecutivos.

Respuesta: Los ángulos suplementarios son 89° y 91°

5. En un triángulo isósceles la medida del lado y la medida de la base están en relación de 4 a 3. Si el perímetro mide 55 centímetros, determinar la medida de los lados iguales y de la base.

Respuesta: Los lados miden 24 centímetros y la base mide 16. centímetros

3. Números enteros

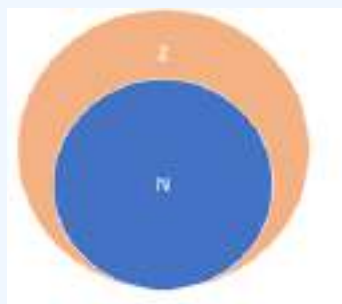
Los números naturales permiten representar y resolver muchas situaciones cotidianas, pero hay algunas en las que resultan insuficientes. Por ejemplo, es común indicar que la temperatura normal del cuerpo humano es cercana a los 37 grados centígrados o que el agua llega a ebullición a los 100°C en lugares que se ubican a nivel del mar; pero si se busca representar que la temperatura en Alaska en la época de frío alcanza 30 grados centígrados bajo cero, no se puede escribir simplemente 30°C . Se escribe -30°C .

Esta misma situación se presenta si se indica que cerca de la costa de Belice se encuentra una sima marina conocida como agujero azul, de aproximadamente 100 metros de profundidad; es necesario representar esta medida como -100 m , para distinguir esta magnitud de la medida de la altura del edificio más alto de Guatemala, que es de 100 m.

De forma práctica se reconoce la existencia de un conjunto que permite medir o contar magnitudes, conformado por números positivos, negativos y cero; a este conjunto se le conoce como **números enteros** se representa por $\mathbb{Z}$. Es decir:

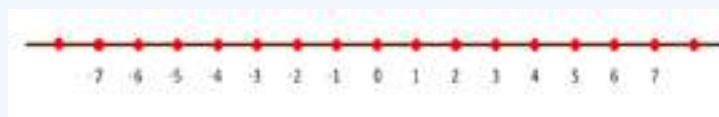
$$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\dots\}$$

El conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$) como se muestra en el siguiente diagrama de Venn.



Esto significa que todo número natural también es un número entero, también se deduce que no todo número entero es natural, tal es el caso de los negativos.

Al representar los números enteros en una recta numérica, se distribuyen de forma simétrica con respecto al 0, de tal forma que los enteros $n > 0$ se ubican a la derecha mientras que los $n < 0$, se ubican a la izquierda.



Esta representación puede ser muy útil, pero debe tenerse muy claro que los números enteros no constituyen una recta numérica en sí mismos, pues tienen una distribución **discreta**, es decir, entre dos enteros **no siempre existe** otro número entero, por ejemplo, entre dos enteros consecutivos cualesquiera (2 y 3, -5 y -4 , 500 y 501).

Una conceptualización interesante resulta de entender a un número entero, como representante de un conjunto de parejas ordenadas de enteros que tienen la misma diferencia $a - b$:

1. 0 representa a todas las diferencias de la forma $a - a$. Ej. $3 - 3$, $50 - 50$, $1000 - 100$
2. Si $a > b$, la diferencia entre a y b representa a los enteros positivos. En forma simbólica, si $a > b$ entonces $a - b > 0$. Ej. El número 5 representa a todas las parejas de números enteros cuya diferencia es 5, es decir, $5 = 6 - 1 = 20 - 15 = 100 - 95$
3. Si $a < b$, la diferencia entre a y b representa a los enteros negativos. En forma simbólica, si $a < b$ entonces $a - b < 0$. Ej. El número -5 representa a todas las parejas de números enteros cuya diferencia es -5 , es decir, $-5 = 1 - 6 = 15 - 20 = 95 - 100$

Será importante tener presente que el concepto de múltiplos de un número entero, es similar al de los múltiplos de un número natural; con la diferencia que en $\mathbb{Z}$ también se incluyen todos los múltiplos negativos.

Por ejemplo: los múltiplos de 2 surgen de multiplicar por 2 los números enteros y de forma similar, los múltiplos de 7 en los enteros, se generan al multiplicar por 7 los elementos del conjunto de números enteros. Se pueden representar por:

$$M(2) = \{\dots - 6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$M(7) = \{\dots - 21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$$

En resumen, los múltiplos de un número entero n , es el conjunto de números de la forma $n \times k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

3.1 Operaciones con números enteros y sus propiedades

Al considerar al conjunto de los números enteros como una extensión del conjunto de los números naturales, se cuenta con la base de las operaciones aritméticas analizadas anteriormente, así como las propiedades de dichas operaciones.

La adición y la multiplicación de números enteros conservan las propiedades de: unicidad, cerradura, asociatividad, conmutatividad, existencia de elemento neutro, cancelación y distributividad de la

multiplicación sobre la adición.

Además, la suma de números enteros posee otra importante propiedad denominada **existencia de elemento simétrico**, que significa que para todo número entero existe un número de igual magnitud y diferente signo, de tal manera que la suma de un entero y su simétrico es el elemento neutro (0). Este elemento se describe en algunos libros de texto como **el opuesto o inverso aditivo**, en forma simbólica se expresa como:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}, \text{ tal que, } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Como ejemplos particulares, se tiene que el elemento simétrico de 8 es -8 , así como el elemento simétrico de -20 es 20, ya que: $8 + (-8) = 0$ y $(-20) + (20) = 0$.

Reglas prácticas para las operaciones con números enteros

Adición

Cuando se suman números enteros puede ocurrir que los sumandos sean de igual o de diferente signo, por lo que se procede de la siguiente forma:

- a) Si los números son de igual signo, todos positivos o todos negativos, se suman sus valores y se conserva el signo. Por ejemplo:

$$40 + 8 + 12 = 60$$

$$(-40) + (-8) + (-12) = -60$$

- b) Si los números son de diferente signo, se restan y se conserva el signo del mayor. Por ejemplo:

$$81 + (-12) = 69$$

$$-81 + 12 = -69$$

Sustracción

Esta operación es cerrada en el conjunto de número enteros, es decir, si se restan dos números enteros, su diferencia también es un número entero, lo cual no ocurre con los números naturales.

La resta de dos números enteros a y b , se define como:

$$a - b = a + (-b)$$

Esta definición es fácil de comprender cuando se considera que la operación de restar es inversa a la operación de sumar, así, la resta consiste en sumar el simétrico aditivo. Por ejemplo:

$$10 - 15 = 10 + (-15) = -5$$

Es común que para diferenciar el signo de la resta, del signo negativo de un número, se escriban operaciones de esta forma:

$$(-10) - (-15) = -10 + 15 = 5$$

Multiplicación y división

La multiplicación y división de números enteros se realizan bajo las mismas reglas de operación, aunque con diferencias respecto a los resultados; mientras que el producto de enteros siempre es un número entero, el resultado de la división no siempre es un entero, como puede verificarse con un ejemplo sencillo: al efectuar $4 \div 8$ el resultado no es entero

Para multiplicar o dividir números enteros, deben tomarse en cuenta los signos de los números que se operan.

- a) El signo del producto o la división de dos números enteros de igual signo, es positivo.
- b) El signo del producto o división de dos números enteros de diferente signo, es negativo.

$$\begin{array}{llll} (a)(b) = ab & (-a)(-b) = ab & (-a)(b) = -ab & (a)(-b) = -ab \\ (a) \div (b) = (a \div b) & (-a) \div (-b) = a \div b & (-a) \div (b) = -(a \div b) & (a) \div (-b) = -(a \div b) \end{array}$$

Potenciación

Esta operación en el conjunto de números enteros, conserva las mismas propiedades que tiene en el conjunto de números naturales, con excepción de la cerradura ya que es posible que en algunos casos el resultado no sea un número entero; además, el resultado cambiará de signo en función del signo de la base y el exponente. Los casos de interés son:

- a) **La base y el exponente son enteros positivos:** en este caso las operaciones de potenciación y sus resultados equivalen a lo estudiado para los números naturales.
- b) **La base es un entero negativo y el exponente es positivo:** en este caso se presentan situaciones como: $(-a)^n$ tendrá un resultado positivo si n es par, ó será negativo si n es impar.
Ejemplo: $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ mientras que $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$
- c) **La base es un entero positivo y el exponente es negativo:** éste es un caso en que el resultado no corresponde a un número entero, con base en la siguiente definición:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Ejemplo: } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \text{ mientras que } 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

- d) **La base y el exponente son negativos:** se requiere combinar lo establecido en los dos casos anteriores. Por ejemplo:

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

- e) **La base ó el exponente es cero:**

Si la base es cero y el exponente es positivo tenemos: $0^n = 0$.

Si la base es cero y el exponente es negativo, el resultado es indeterminado:

$$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$$

Si la base a es diferente de cero y el exponente es cero, entonces: $a^0 = 1$.

Una explicación sencilla puede ser a partir de indagar en qué caso puede un exponente ser cero, esto es, el elemento neutro de la suma de enteros. Podemos afirmar que para cualquier número entero se cumple que: $n - n = 0$. Ahora bien, como n es un exponente, preguntamos: ¿cuándo se obtiene una resta de exponentes?

Para responder, es necesario definir la división de potencias de igual base, como la operación que conserva la base y la eleva a la resta de exponentes. En forma simbólica se escribe

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0; m, n \in \mathbb{Z}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Si $m=n$, entonces, $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$, además $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = 1$, por lo que $a^0 = 1$

Ejemplo: $2^5 \div 2^5 = 32 \div 32 = 1$. También, $2^5 \div 2^5 = 2^{5-5} = 2^0$. Así, $2^0 = 1$

Radicación

Posiblemente la más conocida de las operaciones de radicación es la raíz cuadrada, por lo que es conveniente ampliar el estudio a otros índices de raíces.

Si n es un entero positivo, se define la raíz de índice n (n -ésima raíz) de un número a , de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ siempre que } b^n = a$$

En particular, $\sqrt[n]{a^n} = a$, si n es impar. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, si n es par.

$$\begin{array}{lll} \text{Observación:} & |a| = a, a > 0 & |a| = 0, a = 0 & |a| = -a, a < 0 \\ \text{Ejemplo:} & |7| = 7 & |0| = 0 & |-7| = -(-7) = 7 \end{array}$$

Esta operación tiene las mismas propiedades que en los números naturales, con la siguiente excepción:

- a) Las raíces de índice par (cuadrada, cuarta, etc.) solo están definidas para los números enteros mayores o iguales que cero, sin que necesariamente los resultados sean números enteros. Ejemplos:

$$\sqrt{64} = 8, \sqrt[4]{81} = 3, \sqrt{30} \text{ existe pero no es entero. } \sqrt{-4} \text{ no está definida en } \mathbb{Z}. \sqrt{(+3)^2} = 3$$

- b) Las raíces de índice impar (cúbica, quinta, etc.) existen para todos los números enteros, aunque los resultados no siempre son enteros. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt[5]{32} = 2, \sqrt[3]{60} \text{ existe, pero no es entero.}$$

Jerarquía de las operaciones

Las operaciones combinadas con números enteros, siguen las mismas reglas de jerarquía que las estudiadas para los números naturales, tomando en cuenta las variaciones de signos que se pueden generar al incluir números negativos y signos de agrupación.

Criterios de divisibilidad y descomposición factorial

Para realizar operaciones y resolver problemas de aplicación de los números enteros, muchas veces se requiere descomponerlos en sus factores; para ello es de mucha utilidad contar con criterios que faciliten el proceso. En la sección anterior se incluyen algunos principios de divisibilidad de números naturales, que siguen siendo válidos en el conjunto de números enteros.

En esta sección se amplía el tema, a partir de la siguiente definición:

Sean tres números enteros n , m y q . Se dice **n** es divisor de **m** si y sólo si existe un número **q** , tal que: $m = n \times q$.

Ejemplo: 8 es divisor de 120, ya que $8 \times 15 = 120$.

En algunos casos, es relativamente fácil encontrar la descomposición factorial de un número entero, pero en otras ocasiones se requiere aplicar ciertos criterios que se indican a continuación.

Algunos criterios de divisibilidad en los números enteros

- a) Un número es divisible por 2, si es un número par, es decir, si su última cifra es par (0, 2, 4, 6, 8). Ejemplos: 1824 y 276 son divisibles por 2, mientras que 643 no lo es, ya que no es par.
- b) Un número es divisible por 3 o por 9, si la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3 o de 9 (divisible por 3 o por 9) .
Ejemplos:
195 es divisible por 3 ya que $1 + 9 + 5 = 15$, es múltiplo de 3; no es divisible por 9 ya que 15 no es múltiplo de 9.
486 es divisible por 3 y por 9, ya que $4 + 8 + 6 = 18$, es múltiplo de 3 y también de 9.
247, no es divisible por 3 y tampoco por 9, ya que $2 + 4 + 7 = 13$. Este resultado no es un múltiplo de 3 y tampoco de 9.
- c) Un número es divisible por 4, si sus dos últimas cifras son divisibles por 4 o bien, son cero.
Ejemplo: 348, 400, 7224, son divisibles por 4.
- d) Un número es divisible por 5 cuando su última cifra termina en 5 ó 0. Ej. 105, 280, 1015, 3075, son múltiplos de 5 pues terminan en 5 ó 0.
- e) Un número es divisible por 6, si es divisible por 2 y por 3. Ejemplos: 72 es divisible por 6 pues es par y sus cifras suman 9, así que es divisible por 2 y también es divisible por 3.
82 es un número par, por lo que es divisible por 2; pero sus cifras suman 10, que no es múltiplo de 3, por lo tanto, 82 no es múltiplo de 6.
- f) Un número es divisible por 10, 100, 1000 o por una potencia de 10, si termina en uno, dos,

tres o n ceros. Ejemplos: 560 es divisible por 10, 800 es divisible por 100, 24000, es divisible por 1000.

- g) El proceso para determinar si un número es divisible por 7, no es tan directo, pero es más interesante. Se explica mediante dos ejemplos. Determinar si 1911 es divisible por 7.

- Eliminar la cifra de las unidades: se elimina 1 y queda 191
- Duplicar esa cifra y restar del número anterior: $191 - 2(1) = 189$
- Repetir el proceso. Eliminar cifra de las unidades: 18
- Duplicar esa cifra y restar del número anterior: $18 - 2(9) = 0$

Si se obtiene cero o un múltiplo de 7, el número es divisible por 7. Por lo tanto, 1911 es divisible por 7.

Determinar si 1316 es divisible por 7.

- Eliminar la cifra de las unidades: se elimina 6 y queda 131
- Duplicar esa cifra y restar del número anterior: $131 - 2(6) = 119$
- Repetir el proceso. Eliminar cifra de las unidades: 11
- Duplicar esa cifra y restar del número anterior: $11 - 2(9) = -7$

El resultado es múltiplo de 7, por lo cual concluye el proceso y se determina que 1316 es divisible por 7.

- h) Para determinar si un número es divisible por 13, se realiza un proceso similar, que varía al multiplicar por 9 cifra de las unidades que se separa. Se explica mediante un ejemplo: Determinar si 2795 es divisible por 13

- Eliminar la cifra de las unidades: 279
- Multiplicar esa cifra por 9 y restar del número anterior: $279 - 9(5) = 234$
- Repetir el proceso. Eliminar cifra de las unidades: 23
- Multiplicar esa cifra por 9 y restar del número anterior: $23 - 9(4) = -13$

Dado que se obtuvo un múltiplo de 13, se concluye que 2795 es divisible por 13

3.1.1 Ejercicios resueltos

1. Simplifique la siguiente expresión

$$8 + [9 - \{6 - (5 - 4)\}] + 14 - \{11 - [7 - (3 - 2)]\}$$

Solución:

Se inicia con las operaciones internas siguiendo la jerarquía de las operaciones, comenzaremos con los paréntesis.

$$8 + [9 - \{6 - (1)\}] + 14 - \{11 - [7 - (1)]\}$$

Se sigue reduciendo desde las operaciones internas.

$$8 + [9 - \{5\}] + 14 - \{11 - [6]\}$$

Operando dentro de los últimos signos de agrupación, se tiene que:

$$8 + [4] + 14 - \{5\}$$

$$8 + 4 + 14 - 5$$

Finalmente, reducimos operando sumas y restas.

$$8 + 4 + 14 - 5 = 26 - 5 = 21$$

Respuesta:

La expresión simplificada es igual a 21.

.....

2. Simplifique la siguiente expresión

$$800 - \{20 - 3 \times 4 + 5[-18(-6 - 4) + (2 - 5)40]\}$$

Solución:

Se inicia con las operaciones internas siguiendo la jerarquía de las operaciones, empezaremos por los paréntesis.

$$800 - \{20 - 3 \times 4 + 5[-18(-10) + (-3)40]\}$$

Siguiendo la jerarquía de las operaciones realizamos la multiplicación dentro de los corchetes.

$$800 - \{20 - 3 \times 4 + 5[180 - 120]\}$$

Ahora simplificamos dentro de los corchetes.

$$800 - \{20 - 3 \times 4 + 5[60]\}$$

Se continúa operando dentro de las llaves.

$$800 - \{20 - 12 + 300\}$$

$$800 - \{308\}$$

Finalmente, reducimos la expresión restando.

$$800 - 308 = 492$$

Respuesta:

La expresión simplificada es igual a 492.

.....

3. Simplifique la siguiente expresión

$$[-5 \times 2^{-3} \times 4^3 \times 3^4 \times 2 \times 2^5 \times (-2)^3] \div [2^2 \times 3^2 \times 5 \times 2^{-4} \times 3]$$

Solución:

Para empezar a reducir la expresión agrupamos las potencias de igual base en ambos corchetes.

$$[-5 \times (2^{-3} \times 2 \times 2^5 \times) \times 4^3 \times 3^4 \times -8] \div [(2^2 \times 2^{-4}) \times (3^2 \times 3) \times 5]$$

Se convierten a potencias de 2 las expresiones que cumplan con las condiciones

$$[-5 \times (2^{-3} \times 2 \times 2^5 \times) \times (2^2)^3 \times 3^4 \times -8] \div [(2^2 \times 2^{-4}) \times (3^2 \times 3) \times 5]$$

Operamos dentro de los paréntesis para reducir aplicando las leyes de potenciación

$$[-5 \times (2^{-3+1+5}) \times 2^6 \times 3^4 \times -8] \div [(2^{2-4}) \times (3^{2+1}) \times 5]$$

$$[-5 \times (2^3) \times 2^6 \times 3^4 \times -8] \div [(2^{-2}) \times (3^3) \times 5]$$

En el primer corchete podemos observar que tenemos un -5 y un -8 , esto quiere decir que al momento de multiplicar dentro del mismo el resultado será positivo por la ley de signos, por lo que tendremos lo siguiente:

$$[5 \times (2^3) \times 2^6 \times 3^4 \times +8] \div [(2^{-2}) \times (3^3) \times 5]$$

El 8 del primer corchete también puede ser expresado como potencias de 2, por lo que tenemos lo siguiente:

$$[5 \times (2^3) \times 2^6 \times 3^4 \times +2^3] \div [(2^{-2}) \times (3^3) \times 5]$$

Operamos nuevamente las expresiones con la misma base:

$$[5 \times 2^{3+6+3} \times 3^4 \times] \div [(2^{-2}) \times (3^3) \times 5]$$

$$[5 \times 2^{12} \times 3^4 \times] \div [(2^{-2}) \times (3^3) \times 5]$$

Ahora que hemos reducido las expresiones de cada corchete, se dividen las potencias de igual base aplicando las propiedades para ello.

$$5^{1-1} \times 2^{12-(-2)} \times 3^{4-3}$$

Finalmente, operamos los exponentes:

$$5^0 \times 2^{14} \times 3^1 = 1 \times 2^{14} \times 3 = 3 \times 2^{14}$$

Respuesta:

La expresión simplificada es igual a 3×2^{14}

.....

4. Simplifique la siguiente expresión

$$2^2[3^4 \times (-12 + 15)^2 - \sqrt{81} \times (6 \times 3 \div 2)] \div [6^2 \times (5^2 - 4^2) - \sqrt{16} \times (24 \div 8 \times 3)]$$

Solución:

Para empezar a reducir la expresión, efectuamos las operaciones internas en los paréntesis.

$$2^2[3^4 \times (3)^2 - \sqrt{81} \times (9)] \div [6^2 \times (25 - 16) - \sqrt{16} \times (9)]$$

Ahora operamos las raíces y potencias.

$$2^2[3^4 \times (3)^2 - 9 \times (9)] \div [36 \times (9) - 4 \times (9)]$$

Ahora reescribimos los resultados como potencias de 2 y 3

$$2^2[3^4 \times (3)^2 - 3^2 \times (3^2)] \div [3^2 \times 2^2 \times 3^2 - 2^2 \times 3^2]$$

El siguiente paso es operar las expresiones con la misma base y ordenar nuestras expresiones.

$$2^2[3^4 \times 3^2 - 3^4] \div [3^2 \times 3^2 \times 2^2 - 3^2 \times 2^2]$$

Dentro de cada corchete de buscará las expresiones comunes para poder operar

$$2^2[3^4(3^2 - 1)] \div [3^2 \times 2^2(3^2 - 1)]$$

Como podemos ver, en ambos corchetes tenemos la expresión $3^2 - 1$, por lo que al momento de dividir ambas expresiones serán igual a 1 por lo que obtendríamos lo siguiente:

$$2^2 \times 3^4 \div [3^2 \times 2^2]$$

Operando de acuerdo a las leyes de exponentes obtenemos la simplificación de la expresión.

$$2^2 \times 3^4 \div [3^2 \times 2^2] = 2^{2-2} \times 3^{4-2} = 2^0 \times 3^2 = 3^2$$

Respuesta:

La expresión simplificada es igual a 3^2

.....

5. Simplifique la siguiente expresión

$$(10^2 - 6^2) \div 4 \times 2 - 2 \times \sqrt{121}(3^2 - 12) - (-3)^2(2^3)$$

Solución:

El primer paso para reducir la expresión será operar las distintas potencias y radicales en la expresión.

$$(100 - 36) \div 4 \times 2 - 2 \times 11(9 - 12) - (9)(8)$$

Se opera dentro de los paréntesis siguiendo la jerarquía de las operaciones.

$$64 \div 4 \times 2 - 2 \times 11(-3) - (9)(8)$$

Ahora operamos empezando por las multiplicaciones y divisiones.

$$16 \times 2 - 22(-3) - 72$$

Se efectúan los productos indicados y luego se operan sumas y restas.

$$32 - (-66) - 72 = 32 + 66 - 72 = 26$$

Respuesta:

La expresión simplificada es igual a 26.

3.1.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

Simplifique las expresiones dadas

$$1. 250 - [(6 + 4) - (3 - 1) + 2] + \{16 - [(8 + 3) - (-12 - 10)]\}$$

R/223

$$2. -200 - \{-16 + 7 \times 3 - 4[9(-7 + 10) - (-4 - 3)2]\}$$

R/-41

$$3. [6^3 \times 4^4 \times 5^{-3} \times 15^2 \times 2^{-2} \times (-3)^3] \div [(-3)^2 \times 8^3 \times 5^{-4} \times 2^{-6}]$$

R/-2⁶ × 3⁶ × 5³

$$4. [2^6 \times (-13 + 16)^3 - \sqrt{144} \times (16 \div 2 \times 3)] \div [3^2 \times (10^2 - 8^2) - \sqrt{25} \times (3^2 - 1^2) \times (3^4 \div 3^2)]$$

R/-2³ × 5

$$5. (5^2 - 4^2) \div 3 \times 2 - 3\sqrt{144}(3^2 - 5) - (-2)^3(3^2)$$

R/-66

.....

3.2 Resolución de problemas

3.2.1 Ejercicios resueltos

1. La mitad de la diferencia de dos números es 60 y el doble de su cociente es 10. Encuentre los dos números.

Soulución:

Para poder encontrar los números que cumplen con las condiciones indicadas, tenemos que evaluar las relaciones entre los números enteros. Una relación importante la provee el siguiente teorema:

Al dividir la diferencia entre dos números entre su cociente menos 1, se obtiene como resultado el número menor.

La información que tenemos del problema es la siguiente:

a) La mitad de la diferencia entre los número es igual a 60

$$\frac{N_1 - N_2}{2} = 60$$

b) El doble del cociente de los números es 10

$$2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right) = 10$$

Utilizando estos datos buscaremos los dos números. El teorema nos indica que necesitamos la diferencia y el cociente de los números, tendremos entonces lo siguiente:

La diferencia será:

$$\frac{N_{mayor} - N_{menor}}{2} = 60$$

$$N_{mayor} - N_{menor} = 60 * 2 = 120$$

El cociente será:

$$2 \left(\frac{N_{mayor}}{N_{menor}} \right) = 10$$

$$\left(\frac{N_{mayor}}{N_{menor}} \right) = \frac{10}{2} = 5$$

Para encontrar el número menor de los dos aplicaremos la siguiente relación:

$$N_{menor} = \frac{Diferencia}{Cociente - 1}$$

Utilizando los datos, obtenemos:

$$N_{menor} = \frac{120}{5 - 1} = \frac{120}{4} = 30$$

Al tener la magnitud del número menor, buscaremos el número mayor aplicando las condiciones dadas.

$$N_{mayor} - 30 = 120$$

$$N_{mayor} = 120 + 30 = 150$$

También:

$$\left(\frac{N_{mayor}}{30} \right) = 5$$

$$N_{mayor} = 5 * 30 = 150$$

Respuesta:

Los números son 150 y 30.

.....

2. Hoy la edad de Andrés es cuatro veces la de Bianca y cuando ella nació, Andrés tenía 12 años. Hallar las edades de ambos.

Solución:

Para poder encontrar los números que cumplen con las condiciones indicadas, tenemos que evaluar las relaciones entre los números enteros. Para ello se toma como base el teorema aplicado en el ejercicio anterior:

Al dividir la diferencia entre dos números, entre su cociente menos 1, se obtiene como resultado el número menor.

Para poder aplicar esto debemos encontrar el cociente y la diferencia entre las edades.

Al nacer Bianca, Andrés tenía 12 años por lo que la diferencia entre ambos es de 12 años.

$$\text{Edad de Andrés} - \text{Edad de Bianca} = 12 \text{ años}$$

También sabemos que la edad de Andrés es cuatro veces la edad de Bianca.

$$A = 4B$$

Por lo tanto su cociente sería:

$$\frac{A}{B} = 4$$

Buscaremos la edad de Bianca con la relación previamente mencionada.

$$Edad_{Bianca} = B = \frac{Diferencia}{Cociente - 1}$$

Utilizando los datos, obtenemos:

$$B = \frac{12}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4$$

Ahora que tenemos la edad de Bianca podemos calcular la edad de Andrés.

$$A - 4 = 12$$

$$A = 12 + 4 = 16$$

También:

$$A = 4B$$

$$A = 4 * 4 = 16$$

Respuesta:

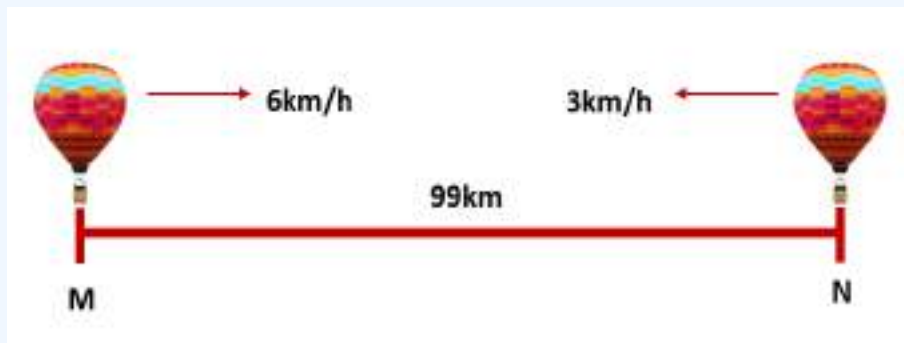
Las edades son 16 y 4 años para Andrés y Bianca, respectivamente.

.....

3. Dos globos aeroestáticos parten de los puntos M y N, distantes entre sí 99 km y se dirigen uno hacia el otro. El globo que parte de M sale a las 6:00 a.m. a 6 km/h y el que parte de N lo hace a las 9:00 a.m. a una velocidad de 3 km/h. Sabiendo que el globo de M descansa de 12:00 a 3:00 p.m. y a las 3 emprende de nuevo su marcha a la misma velocidad, ¿A qué hora se encontrará con el globo que salió de N, que no varió su velocidad desde que salió? ¿A qué distancia de los puntos M y N se encontrarán?

Solución:

Para resolver el problema empezaremos por realizar un esquema de la situación.



Se nos indica que el globo que sale de M, se mueve de 6:00 a.m a 12:00 p.m., es decir, se mueve por 6 horas, podemos calcular entonces la distancia que recorre en ese tiempo utilizando la siguiente relación:

$$Velocidad = \frac{Distancia}{Tiempo}$$

Por lo que la distancia sería:

$$Distancia = Velocidad * Tiempo$$

La distancia inicial recorrida por el globo que parte de M será entonces:

$$D_{GM} = 6km/h * 6hrs = 36km$$

El globo que salió de M recorrerá 36km antes de detenerse. Por otra parte, el globo que sale de N empieza a moverse a las 9:00 a.m. pero no hace ninguna parada por lo que la distancia que recorre hasta que el otro globo reinicia la marcha, es:

$$T_{GN} = 15hrs - 9hrs = 6hrs$$

La distancia que recorre el globo que partió de N, en 6 horas, es:

$$D_{Gn} = 3km/h * 6hrs = 18km$$

Realizamos un nuevo esquema de la situación a las 15:00 horas



En el esquema podemos ver que los globos se han acercado, las líneas verdes corresponden a la distancia recorrida por cada uno desde los puntos M y N, podemos ver que al momento en que el globo de M empieza a moverse de nuevo hay 45km entre los dos globos.

A partir de ese momento los dos se mueven al mismo tiempo hasta encontrarse, se hace necesario determinar qué distancia recorrerán cada hora, para determinar el momento en que se encontrarán.

Sabemos que los globos se mueven a velocidad constante, la distancia que recorren en una hora será:

$$D_{GM_1} = 6km/h * 1hr = 6km$$

$$D_{GN_1} = 3km/h * 1hr = 3km$$

La distancia que recorrerían en una hora sería la combinación de ambas, lo que equivale a 9 km en una hora, esto significa que la distancia cambia 9km cada hora o sea $v = 9km/h$.

Ahora podemos determinar en cuántas horas se encontrarán los dos globos, dividiendo la distancia

que falta recorrer entre la distancia que recorrerán cada hora.

$$T_{\text{Encuentro}} = \frac{45\text{km}}{9\text{km/h}} = 5\text{horas}$$

El tiempo de encuentro se dará 5 horas después de las 15:00 horas por lo tanto se encontrarán a las 20:00 horas u 8:00 p.m.

Para encontrar la distancia total recorrida por cada globo se debe tomar la distancia inicial más la distancia recorrida a partir de las 3:00 p.m. para cada globo.

$$G_M = 36\text{km} + 6\text{km/h} * 5\text{hrs} = 36\text{km} + 30\text{km} = 66\text{km}$$

$$G_N = 18\text{km} + 3\text{km/h} * 5\text{hrs} = 18\text{km} + 15\text{km} = 33\text{km}$$

El siguiente esquema muestra la distancia recorrida por cada globo desde los puntos M y N.



Respuesta:

Los globos se encuentran a las 8:00 p.m. en un punto a 66km del M y a 33 km de N.

.....

4. Un estanque tiene 3 grifos que vierten agua en un depósito: el primero, 50 litros en 5 minutos; el segundo, 91 litros en 7 minutos y el tercero, 108 litros en 12 minutos. También tiene dos desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos, respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo, necesita 40 minutos para llenarse. ¿Cuál es la capacidad del estanque?

Solución:

El primer paso será realizar un esquema de la situación:



Se tienen 3 entradas de agua al estanque y 2 salidas. Calcularemos entonces el caudal de entrada de agua conjunta y el caudal de salida de agua conjunta.

Para calcular el caudal de entrada conjunta, necesitamos el caudal de cada grifo:

$$G_1 = \frac{50L}{5min} = 10L/min$$

$$G_2 = \frac{91L}{7min} = 13L/min$$

$$G_3 = \frac{108L}{12min} = 9L/min$$

El caudal de entrada será entonces:

$$C_E = 10 + 13 + 9 = 32L/min$$

Podemos calcular el caudal de salida de agua del estanque, compuesto por el caudal de salida de cada desagüe:

$$D_1 = \frac{40L}{5min} = 8L/min$$

$$D_2 = \frac{60L}{6min} = 10L/min$$

El caudal de salida será entonces:

$$C_S = 8 + 10 = 18L/min$$

Entonces, al tomar en cuenta el caudal de entrada de agua y el de salida de agua encontraremos el caudal real de llenado:

$$C_{RL} = C_E - C_S = 32L/min - 18L/min = 14L/min$$

Ahora que sabemos el caudal real de llenado y el tiempo de llenado podemos calcular la capacidad en litros del estanque.

La capacidad del estanque será entonces el caudal real de llenado por el tiempo de llenado:

$$Capacidad = T * C_{RL} = 40min * 14L/min = 560L$$

Respuesta:

La capacidad del estanque es de 560 litros.

.....

5. Si en un estanque que está vacío y cuya capacidad es de 3,600 litros, se abrieran al mismo tiempo tres llaves y un desagüe, el estanque se llenaría en 15 minutos. Por el desagüe salen 240 litros en 4 minutos. Si el estanque tiene 600 litros de agua y está cerrado el desagüe, ¿en cuánto tiempo lo terminarán de llenar las tres llaves?

Solución:

Empezaremos por realizar un esquema de la situación:



El estanque tiene una capacidad de 3600 litros y tiene tres entradas de agua y una salida. Sabemos que al estar todos abiertos, el estanque se llena en 15 minutos, con base en esto podemos calcular el caudal real de llenado.

$$C_{RL} = \frac{\text{Capacidad}}{\text{Tiempo}_{\text{llenado}}} = \frac{3600L}{15min} = 240L/min$$

El caudal real de llenado corresponde a la diferencia entre el caudal de entrada y el caudal de salida de agua. Calculemos entonces cada uno de ellos.

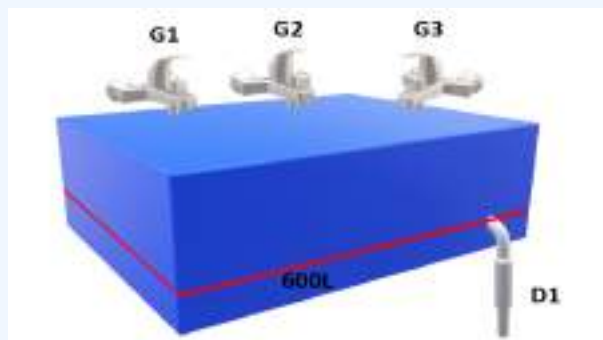
El caudal de salida sera:

$$C_S = \frac{240L}{4min} = 60L/min$$

El caudal de entrada será entonces:

$$C_E = C_{RL} + C_S = 240L/min + 60L/min = 300L/min$$

Analicemos el nuevo escenario:



Si el estanque contiene 600 litros y se ha cerrado el desagüe, queremos saber el tiempo que tomará terminar de llenar el estanque.

El volumen que hace falta para terminar de llenar el estanque será entonces:

$$V_F = 3600L - 600L = 3000L$$

El tiempo que tomará llenar el estanque dependerá tanto del volumen faltante como del caudal de llenado producido por los tres grifos, no se toma en cuenta el caudal de salida porque el desagüe está cerrado:

$$T = \frac{V_F}{C_E} = \frac{3000L}{300L/min} = 10min$$

Respuesta:

Le tomará 10 minutos a los tres grifos terminar de llenar el estanque con el desagüe cerrado.

.....

3.2.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. 2000 excede en 788 a la diferencia de dos números y en 1995 a su cociente. Encuentre los dos números

Respuesta: Los números son 1515 y 303.

2. Ana tiene 16 años, a Betty le faltan 8 años para tener 10 años más que el doble de lo que tiene Ana y a Claudia le sobran 9 años para tener la mitad de la suma de las edades de Ana y Betty. ¿En cuánto excede 70 años a la suma de las edades de Betty y Claudia, disminuida en la edad de Ana?

Respuesta: 70 años excede en 18 años a la suma de las edades de Betty y Claudia menos la edad de Ana.

3. Dos autos salen a la misma hora de dos ciudades A y B, distantes 300 km entre sí y van uno hacia el encuentro del otro. Se encuentran a la 1:00 p.m. en un punto que dista 120 km de A. Determinar a qué hora salieron, sabiendo que el auto que salió de A iba a 30 km/h y el que salió de B iba a 50km/h.

Respuesta: Los autos inician su recorrido a las 9:00 a.m.

4. Si a un estanque de 480 litros de capacidad que está lleno se le abre el desagüe, se vacía en una hora. Si estando vacío y cerrado el desagüe, se abre la llave de agua, se llena en 40 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará, si estando vacío y abierto el desagüe, se abre la llave?

Respuesta: El estanque se llenará en 120 minutos o 2 horas

5. Un depósito tiene tres llaves que vierten agua: la primera, 68 L en 4 minutos; la segundo, 108 L en 6 minutos y la tercera, 248 L en 8 minutos; además tiene un desagüe por el que salen 55 L en 5 minutos. Si el desagüe está cerrado y se abren las tres llaves al mismo tiempo, el depósito se llena en 53 minutos. ¿En cuánto tiempo, puede vaciarlo el desagüe estando lleno y cerradas las llaves?

Respuesta: El desagüe puede vaciar el depósito en 318 minutos o 5 horas con 18 minutos



4. Números racionales

Los números racionales se presentan en el mundo real en muchas situaciones asociadas con repartos, estadísticas, comparaciones y otras tales como: en Guatemala aproximadamente 13 de cada 100 personas tiene acceso a internet, esto se representa como $\frac{13}{100}$; un jugador de beisbol batea en 2 de cada 5 turnos, lo cual se indica como $\frac{2}{5}$; una herencia se reparte en partes iguales entre tres hermanos, por lo que a cada uno le corresponde $\frac{1}{3}$.

Al representar números como el cociente de dos enteros, es común que en muchos libros de texto se les identifique como fracciones o quebrados, para los cuales se excluye la posibilidad de que el denominador sea cero.

Los números racionales constituyen una ampliación del conjunto de números enteros, por lo que preserva las propiedades que se han estudiado y a la vez, incluye otras muy importantes que permiten aplicaciones que no son posibles con los números enteros.

Los números racionales se denotan por $\mathbb{Q}$ y se definen como:

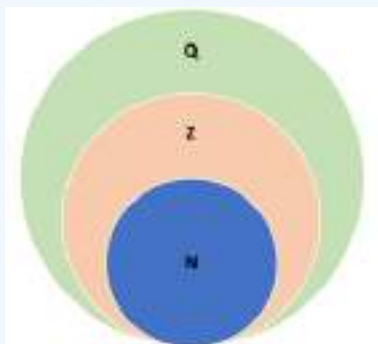
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Si se considera que $b = 1$, entonces se generan los números enteros, es decir, el conjunto de números enteros está contenido en el conjunto de números racionales; además, se estableció con anterioridad que el conjunto de números naturales está contenido en los números enteros.

Esta relación entre los conjuntos numéricos se expresa como:

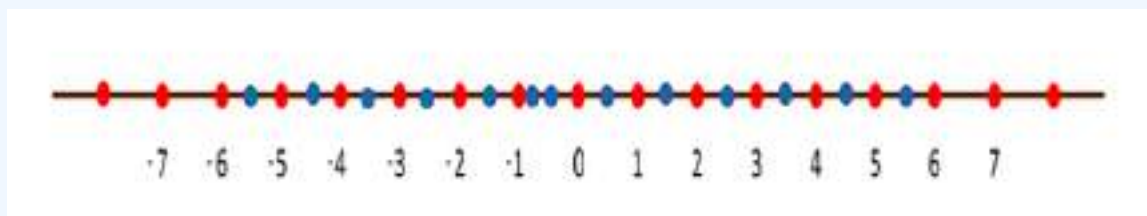
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

lo cual se representa en el diagrama de Venn que se muestra abajo



Esta relación de contención implica que los números naturales y los números enteros son racionales, sin embargo, existen números racionales que no son enteros ni naturales.

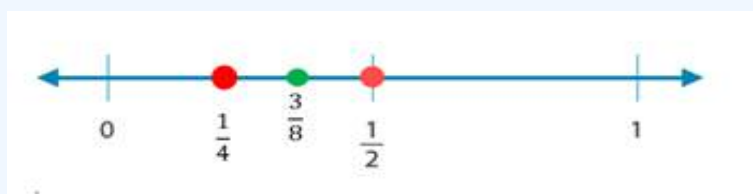
El conjunto de números racionales es ordenado, por lo que se pueden representar en una recta numérica distribuidos de forma simétrica respecto al 0.



En la figura anterior puede notarse que los números racionales van ocupando espacios entre los números enteros, si bien aún se percibe que no constituyen una recta numérica completa, siempre es posible encontrar un número racional entre dos racionales dados. A esta propiedad se le llama **densidad**, por lo que se dice que: el conjunto de los números racionales es **denso**.

Para verificar esta propiedad, pueden tomarse dos números racionales cualesquiera y encontrar el punto medio entre ellos, por ejemplo: se eligen $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$. Al sumarlos se obtiene: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Ahora se encuentra el punto medio, dividiendo la suma entre dos: $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$.

Centrando la atención solamente entre cero y uno, puede visualizarse mejor los números indicados.



Una conceptualización de los números racionales importante de comprender, se basa en la definición de equivalencia entre fracciones que se enuncia de la siguiente forma: dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, si y sólo si, se cumple que: $a \times d = b \times c$.

En la práctica, para realizar operaciones muchas veces se requiere generar fracciones equivalentes ampliadas o bien, encontrar fracciones equivalentes simplificadas. En el primer caso, dada una

fracción de la forma $\frac{a}{b}$, serán equivalentes las que tengan la forma $\frac{ka}{kb}$, $k \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ es equivalente a $\frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{45}{75}$ entre otras muchas. Se acostumbra escribir como igualdades, pero debe tenerse presente que esa igualdad representa la definición de equivalencia dada.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{45}{75} = \frac{3k}{5k}$$

Con base en lo anterior, se conceptualiza un número racional como representante de un conjunto de fracciones equivalentes, considerado como la fracción irreducible. En el ejemplo anterior, el número racional $\frac{3}{5}$ representa a la familia de fracciones indicadas; así mismo, el número racional $\frac{1}{2}$ representa a todas sus fracciones equivalentes, entre ellas $\frac{2}{4}, \frac{8}{16}, \frac{45}{90}$.

Otra característica importante del conjunto de números racionales, es que es ordenado, es decir, se puede establecer si una fracción es menor que otra a partir de la siguiente definición: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si, se cumple que: $a \times d < b \times c$.

Por ejemplo: $\frac{3}{7} < \frac{4}{5}$ ya que $3 \times 5 < 4 \times 7$, es decir, $15 < 28$.

De forma equivalente, se puede expresar que $\frac{4}{5} > \frac{3}{7}$ ya que $4 \times 7 > 3 \times 5$, es decir, $28 > 15$

4.1 Operaciones y simplificación de números racionales

En el conjunto de los números racionales tienen validez las propiedades de las operaciones aritméticas analizadas para los números enteros y naturales.

De forma particular, la adición y la multiplicación conservan las propiedades de: unicidad, cerradura, asociatividad, conmutatividad, existencia de elemento neutro, existencia de elemento simétrico para la adición, cancelación y distributividad de la multiplicación sobre la adición.

Además, la multiplicación de números racionales posee otra importante propiedad denominada **existencia de inverso multiplicativo o recíproco**, que significa que para todo número racional $a \neq 0$, existe un número de la forma $\frac{1}{a}$, tal que al multiplicarlos se obtiene el elemento neutro del producto. En forma simbólica:

$$\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}, a * \frac{1}{a} = 1$$

Veamos algunos ejemplos, al encontrar el inverso multiplicativo de: $4, -2, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}, -\frac{11}{6}$,

- Para 4, es $\frac{1}{4}$ ya que $4 * \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$
- Para -2 es $-\frac{1}{2}$, pues $-2 * -\frac{1}{2} = \frac{-2}{-2} = 1$
- En el caso del racional $\frac{1}{5}$, el recíproco es 5, ya que $\frac{1}{5} * 5 = \frac{5}{5} = 1$

- Para los números $\frac{3}{7}$ y $-\frac{11}{6}$, los recíprocos están dados por: $\frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$ para el primero y $\frac{1}{-\frac{11}{6}} = -\frac{6}{11}$

$\frac{1}{-\frac{11}{6}} = -\frac{6}{11}$, para el segundo. Al multiplicar se verifica que:

$$\frac{3}{7} * \frac{7}{3} = \frac{21}{21} = 1$$

$$-\frac{11}{6} * -\frac{6}{11} = \frac{-66}{-66} = 1$$

Reglas prácticas para las operaciones con números racionales

Al realizar operaciones con números racionales, deben tomarse en consideración las reglas relacionadas con el signo positivo o negativo de las cantidades involucradas, así como la consideración de cualquier denominador diferente de cero.

Adición

Cuando se suman números racionales puede ocurrir que los sumandos sean de igual o de diferente denominador, por lo que se procede de la siguiente forma:

- a) Si el denominador es el mismo, se procede a sumar los numeradores y se conserva el mismo denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{2+10}{9} = \frac{12}{9}$$

- b) Si el denominador de los sumandos es diferente, entonces se opera de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2*4+3*1}{3*4} = \frac{11}{12}$$

De esta definición ha derivado una regla práctica para sumar más de dos fracciones que consiste en analizar el producto que corresponde al denominador para identificar si es el mínimo común múltiplo; si es así, se usa como denominador común y si no lo es, se busca dicho múltiplo; a partir de ello se generan fracciones equivalentes con ese denominador y se procede como en el caso anterior.

En el siguiente ejemplo, para los tres números dados, el producto de los denominadores es: $3 \times 4 \times 6 = 72$, pero se identifica que el mínimo común múltiplo de 3, 4 y 6 es 12, por lo que se usa como denominador común y se multiplican los numeradores por 4, 3 y 2, respectivamente, para generar fracciones equivalentes con denominador 12:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{4+9+10}{12} = \frac{23}{12}$$

A medida que se desarrolla habilidad para realizar los procesos de operación, pueden resumirse algunos pasos intermedios.

Sustracción

Esta operación es similar a la adición, tomando en cuenta las reglas involucradas en el caso de restar números de igual o de diferente signo.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} - \frac{8}{9} = \frac{2 \cdot 3 - 8}{9} = \frac{6 - 8}{9} = \frac{-2}{9} = -\frac{2}{9}$$

Multipliación y división

La multiplicación y división de números racionales adoptan las reglas de signos que se estudiaron para los números enteros; el producto de dos números racionales siempre es otro número racional, sin embargo, la división no está definida el caso en que el divisor es cero.

La **multipliación** de números racionales se define de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Se recomienda simplificar los productos indicados, o bien, simplificar el resultado obtenido. Ejemplos:

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{8 \times 3} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

$$-\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = -\frac{3 \times 1 \times 2}{5 \times 2 \times 9} = -\frac{1}{5 \times 3} = -\frac{1}{15}$$

La **división** de números racionales, se define de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$$

$$-\frac{5}{3} \div \frac{3}{2} \div \frac{3}{4} = \left(-\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \right) \div \frac{3}{4} = -\frac{10}{9} \div \frac{3}{4} = -\frac{10}{9} \times \frac{4}{3} = -\frac{40}{27}$$

Potenciación y radicación

En el conjunto de los números racionales, la potenciación conserva todas las propiedades que se han estudiado para los números enteros y naturales. Además, en este conjunto numérico es posible

que los exponentes tengan la forma de una fracción y en ese caso, estén relacionados directamente con una expresión con radicales.

Introducimos una nueva notación:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Con base en esto, se amplía el uso de exponentes fraccionarios, de la siguiente forma: Para un exponente racional en su forma irreducible, m/n , con m y n enteros mayores que cero, se define

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

con la restricción que si n es par, entonces se requiere que $a \geq 0$.

En los ejemplos siguientes se muestra que se puede operar con radicales o con expresiones con exponentes fraccionarios:

- Simplificar

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{16} = 4$$

- Aplicar propiedades de potenciación para evaluar la expresión dada:

$$\left(\frac{25}{64}\right)^{3/2} = \frac{25^{3/2}}{64^{3/2}} = \frac{(5^2)^{3/2}}{(8^2)^{3/2}} = \frac{5^{6/2}}{8^{6/2}} = \frac{5^3}{8^3} = \frac{125}{512}$$

Jerarquía de las operaciones

Las operaciones combinadas con números racionales, siguen las mismas reglas de jerarquía que las estudiadas para los enteros y naturales, tomando en cuenta las definiciones y procedimientos específicos para este conjunto numérico, así como la inclusión de exponentes fraccionarios, tanto positivos como negativos.

Fracciones decimales, notación científica y porcentajes

Las fracciones decimales y la notación científica tienen en común un tema importante: las potencias de 10; las cuales a su vez tienen un rol esencial en el sistema de numeración que utilizamos.

Se dice que una **fracción es decimal**, si el denominador es una potencia de 10, por ejemplo:

$$\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{32}{1000}, \frac{5}{1000000}$$

Al efectuar la división indicada, se obtiene que:

$$\frac{3}{10} = 0.3, \frac{7}{100} = 0.07, \frac{32}{1000} = 0.032, \frac{5}{1000000} = 0.000005$$

Ahora bien, se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si se expresa de la siguiente forma:

$$x = a \times 10^n, \text{ donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es entero.}$$

Así, es posible reescribir las fracciones decimales en notación científica como:

$$0.3 = 3 \times 10^{-1}, 0.07 = 7 \times 10^{-2}, 0.003 = 3 \times 10^{-3}, 0.000005 = 5 \times 10^{-6}$$

El porcentaje, representado por el símbolo %, surge de considerar fracciones cuyo denominador es 100, por ejemplo: $\frac{9}{100} = 0.09 = 9\%$, significa que se ha dividido en 100 partes iguales cierta magnitud y de ella, se han tomado 9 partes.

Algunas situaciones que involucran porcentajes: en Guatemala aproximadamente el 13% de la población tiene acceso a Internet en el año 2019; un artículo se vende con el 5% de descuento si se paga en efectivo, al 80% de los estudiantes de ingeniería les gusta mucho la matemática. Este tema será estudiado en profundidad, en las secciones relacionadas con la resolución de problemas.

Números racionales y representación decimal

Un número racional no entero (fracción) puede representarse en la forma de un número decimal, al efectuar la división del numerador entre el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \frac{9}{4} = 2.25, \frac{7}{5} = 1.4, \frac{3}{8} = 0.375, \frac{1}{25} = 0.04$$

Los ejemplos anteriores, tienen tres características importantes:

- Las fracciones están en su forma irreducible.
- Los denominadores de las fracciones solo incluyen como factores a 2 o 5.
- Las fracciones corresponden a números **decimales exactos**.

Ahora, veamos qué sucede con otros números racionales con denominadores que incluyan en sus denominadores factores diferentes a 2 y 5:

$$\frac{1}{3} = 0.333..., \frac{13}{11} = 1.181818..., \frac{11}{7} = 1.571428571428...$$

Puede notarse que en estos casos los números decimales **no son exactos** como los obtenidos anteriormente, éstos muestran cifras que se repiten de forma sucesiva después del punto decimal: en el primer caso se repite el 3, en el segundo se repiten las cifras 18 y en el tercero, se repite el grupo de seis cifras formado por 571485. Debido a esto, se dice son **números decimales periódicos**, y que el periodo es 3, 18 y 571485, respectivamente.

Como síntesis, se puede afirmar que los números racionales tienen formas decimales exactas o periódicas, esta característica se estudiará posteriormente como un criterio para identificar números que no son racionales.

4.1.1 Ejercicios resueltos

Para las siguientes expresiones redúzcalas a la fracción propia más pequeña.

- Simplifique y convierta a decimales la siguiente expresión

$$\frac{\left(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8} + 0.16\right) * 1\frac{1}{2}}{\left(1\frac{3}{4} + 1\frac{3}{5} - 1\frac{1}{10}\right) + \frac{21}{400}}$$

Solución:

Para simplificar la fracción, el primer paso es asegurarse que toda la expresión esté expresada, ya sea como fracciones o como decimales. En este caso transformaremos todos los decimales en fracciones, por ejemplo:

$$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$0.16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

Al convertir las fracciones, nuestra expresión resultante es:

$$\frac{\left(\frac{7}{2} - \frac{17}{8} + \frac{4}{25}\right) * \frac{3}{2}}{\left(\frac{7}{4} + \frac{8}{5} - \frac{11}{10}\right) + \frac{21}{400}}$$

Ahora que toda la expresión se encuentra en términos de fracciones, pasaremos a operar por separado el numerador y el denominador. Empezaremos por el numerador

$$\left(\frac{7}{2} - \frac{17}{8} + \frac{4}{25}\right) * \frac{3}{2}$$

Simplificaremos primero el interior del paréntesis siguiendo la jerarquía de operaciones.

$$\left(\frac{7}{2} - \frac{17}{8} + \frac{4}{25}\right) = \frac{700 - 425 + 32}{200} = \frac{307}{200}$$

La simplificación de nuestro numerador sería entonces:

$$\left(\frac{307}{200}\right) * \frac{3}{2} = \frac{307 * 3}{200 * 2} = \frac{921}{400}$$

Ahora realizaremos el mismo procedimiento con el denominador:

$$\left(\frac{7}{4} + \frac{8}{5} - \frac{11}{10}\right) + \frac{21}{400}$$

Empezaremos nuevamente por el paréntesis siguiendo la jerarquía de las operaciones

$$\left(\frac{7}{4} + \frac{8}{5} - \frac{11}{10}\right) = \frac{35 + 32 - 22}{20} = \frac{45}{20}$$

La simplificación del denominador será entonces:

$$\frac{45}{20} + \frac{21}{400} = \frac{900 + 21}{400} = \frac{921}{400}$$

Nuestra expresión original se reduce entonces a:

$$\frac{\frac{921}{400}}{\frac{921}{400}} = 1$$

Respuesta:

La expresión se reduce a 1

.....
2. Simplifique la expresión

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{4}{25} + \frac{16}{25} - \frac{3}{20}$$

Solución:

Para reducir la expresión indicada lo primero que debemos hacer es simplificar cada fracción en el numerador y en el denominador.

Para las expresiones del numerador tendríamos:

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{10} = \frac{2 * 10}{5 * 1} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{5} = \frac{3 * 5}{1 * 5} = 3$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{4 * 5}{5 * 2} = 2$$

La reducción del numerador será entonces:

$$4 + 3 + 2 = 9$$

Ahora reducimos el denominador de la expresión original de la misma manera:

$$\frac{4}{25} \div \frac{2}{25} = \frac{4 * 25}{2 * 25} = 2$$

$$\frac{16}{25} \div \frac{4}{25} = \frac{16 * 25}{4 * 25} = 4$$

$$\frac{3}{20} \div \frac{1}{20} = \frac{3 * 20}{20 * 1} = 3$$

La reducción del denominador será entonces:

$$2 + 4 - 3 = 3$$

Sustituyendo los resultados obtenidos al simplificar el numerador y el denominador la expresión se reduce a:

$$\frac{9}{3} = 3$$

Respuesta:

La expresión simplificada sería igual a 3

3. Simplifique la expresión

$$\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 * \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2 * \left(\frac{1}{3}\right)^2} \right]^2$$

Solución:

Aplicaremos las reglas de potenciación y las propiedades de los números racionales para simplificar tanto el numerador como el denominador.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

La reducción del numerador será entonces:

$$\frac{16}{81} * \frac{9}{4} = \frac{16 * 9}{81 * 4} = \frac{4}{9}$$

Ahora procedemos a realizar la reducción del denominador:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$2 * \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

La expresión reducida será entonces:

$$\left[\frac{4}{\frac{9}{9} \div \frac{2}{9}} \right]^2 = \left[\frac{4 * 9}{2 * 9} \right]^2 = 2^2 = 4$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es igual a 4.

.....

4. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{7\frac{1}{9} - 2\frac{14}{15}}{2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{5}} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20}\right) \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14}\right)$$

Solución:

Para simplificar la expresión se aplicarán las leyes de signos y las propiedades de las fracciones.

Siguiendo lo anterior, empezaremos por transformar a fracciones los números dados en el lado izquierdo de la expresión.

$$\frac{\frac{64}{9} - \frac{44}{15}}{\frac{8}{3} + \frac{8}{5}} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20} \right) \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14} \right)$$

Ahora reduciremos la expresión de la izquierda, empezando por el numerador:

$$\frac{64}{9} - \frac{44}{15} = \frac{64 * 5 - 3 * 44}{45} = \frac{320 - 132}{45} = \frac{188}{45}$$

Ahora reducimos el denominador:

$$\frac{8}{3} + \frac{8}{5} = \frac{5 * 8 + 3 * 8}{15} = \frac{40 + 24}{15} = \frac{64}{15}$$

La expresión resultante será entonces:

$$\frac{\frac{188}{45}}{\frac{64}{15}} = \frac{188}{45} \div \frac{64}{15} = \frac{188 * 15}{45 * 64} = \frac{94 * 2 * 15}{15 * 3 * 2 * 32} = \frac{94}{96} = \frac{47}{48}$$

El siguiente paso es simplificar las expresiones de la derecha, siguiendo la jerarquía de operaciones, se operará primero el interior de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20} \right) \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14} \right) \\ & \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{20} \right) = \left(\frac{3 * 5 - 1}{20} \right) = \left(\frac{15 - 1}{20} \right) = \left(\frac{14}{20} \right) = \left(\frac{7}{10} \right) \\ & \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{14} \right) = \left(\frac{2 * 5 - 5 * 1}{14} \right) = \left(\frac{10 - 5}{14} \right) = \left(\frac{5}{14} \right) \end{aligned}$$

La expresión se ha reducido a:

$$\left(\frac{7}{10} \right) \left(\frac{5}{14} \right) = \frac{5 * 7}{10 * 14} = \frac{35}{140} = \frac{5 * 7}{5 * 2 * 7 * 2} = \frac{1}{4}$$

Finalmente, para terminar de reducir la expresión, realizaremos la última operación:

$$\frac{47}{48} - \frac{1}{4} = \frac{47 * 1 - 12 * 1}{48} = \frac{47 - 12}{48} = \frac{35}{48}$$

Respuesta:

La reducción de la expresión es $\frac{35}{48}$

.....

5. Simplifique la expresión

$$\left(41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}\right) \left\{ \left[4 - 3\frac{1}{2} \left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5} \right) \right] \div 0.16 \right\}$$

Solución:

Para simplificar la expresión aplicaremos la jerarquía de las operaciones y las propiedades de los números racionales.

Empezaremos por convertir todos los números dados a fracciones.

$$\left(\frac{3467}{84} - \frac{2449}{60}\right) \left\{ \left[4 - \frac{7}{2} \left(\frac{15}{7} - \frac{6}{5} \right) \right] \div \frac{4}{25} \right\}$$

Siguiendo la jerarquía de operaciones empezaremos de adentro hacia afuera, operaremos primero los paréntesis

$$\left(\frac{3467}{84} - \frac{2449}{60}\right) = \left(\frac{17335 - 17143}{420}\right) = \left(\frac{192}{420}\right) = \left(\frac{16}{35}\right)$$

Reduciendo el otro paréntesis:

$$\left(\frac{15}{7} - \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{75 - 42}{35}\right) = \left(\frac{33}{35}\right)$$

La expresión se reduce entonces a:

$$\left(\frac{16}{35}\right) \left\{ \left[4 - \frac{7}{2} \left(\frac{33}{35} \right) \right] \div \frac{4}{25} \right\}$$

Siguiendo la jerarquía de operaciones, operaremos dentro de los corchetes.

$$\left[4 - \frac{7}{2} \left(\frac{33}{35} \right) \right] = \left[4 - \left(\frac{7 * 33}{2 * 35} \right) \right] = \left[4 - \left(\frac{33}{10} \right) \right] = \left[\frac{4 * 10 - 33 * 1}{10} \right] = \left[\frac{40 - 33}{10} \right] = \left[\frac{7}{10} \right]$$

El siguiente paso para reducir la expresión es operar el interior de las llaves:

$$\left\{ \frac{7}{10} \div \frac{4}{25} \right\} = \left\{ \frac{7 * 25}{10 * 4} \right\} = \left\{ \frac{35}{8} \right\}$$

Finalmente, multiplicamos las expresiones simplificadas:

$$\left(\frac{16}{35}\right) * \left\{\frac{35}{8}\right\} = \frac{16 * 35}{35 * 8} = 2$$

Respuesta:

La reducción de la expresión es 2

.....

6. Simplifique la expresión

$$\left(10 \div 2\frac{2}{3} + 7.5 \div 10\right) * \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} * 0.25 + \frac{157}{360}\right)$$

Solución:

Para simplificar la expresión dada deben tomarse en consideración las propiedades de las operaciones con los números racionales y la jerarquía de las operaciones.

El primer paso será convertir toda la expresión a formas fraccionarias

$$\left(10 \div \frac{8}{3} + \frac{75}{10} \div 10\right) * \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} * \frac{1}{4} + \frac{157}{360}\right)$$

El siguiente paso será operar dentro de los paréntesis, debemos seguir la jerarquía de las operaciones, realizando primero las divisiones y multiplicaciones.

Para el primer paréntesis tendremos entonces:

$$10 \div \frac{8}{3} = \frac{10 * 3}{1 * 8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{75}{10} \div 10 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

El primer paréntesis será entonces:

$$\left(\frac{15}{4} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{18}{4}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)$$

En el segundo paréntesis tendremos entonces:

$$\frac{7}{30} * \frac{1}{4} = \frac{7 * 1}{30 * 4} = \frac{7}{120}$$

Operando el resto de la expresión del segundo paréntesis

$$\left(\frac{3}{40} - \frac{7}{120} + \frac{157}{360}\right) = \left(\frac{3 * 9 - 7 * 3 + 157}{360}\right) = \left(\frac{27 - 21 + 157}{360}\right) = \left(\frac{163}{360}\right)$$

Ahora que tenemos la reducción de cada paréntesis podemos realizar la última reducción de la expresión:

$$\left(\frac{9}{2}\right) * \left(\frac{163}{360}\right) = \frac{9 * 163}{2 * 360} = \frac{163}{2 * 40} = \frac{163}{80}$$

Respuesta:

La reducción de la expresión es $\frac{163}{80}$

.....

7. Reduzca la siguiente fracción

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Solución:

Para reducir este tipo de fracciones se debe comenzar por la última rama del denominador e ir subiendo hasta reducir a una sola fracción.

La reducción inicial de la fracción será entonces:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2*1+1*1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

La expresión resultante después de la reducción es:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}$$

Reducimos el denominador nuevamente:

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

La expresión con la nueva reducción es:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{3}{5}}$$

Realizamos la siguiente reducción:

$$3 + \frac{3}{5} = \frac{3*5+3*1}{5} = \frac{15+3}{5} = \frac{18}{5}$$

La expresión se reduce a:

$$2 + \frac{1}{\frac{18}{5}} = 2 + \frac{5}{18}$$

Finalmente realizamos la última operación para terminar de reducir la expresión:

$$2 + \frac{5}{18} = \frac{2*18+5*1}{18} = \frac{36+5}{18} = \frac{41}{18}$$

Respuesta:

La reducción de la fracción es $\frac{41}{18}$

.....

4.1.2 Ejercicios Propuestos para autoevaluación

Simplifique las siguientes expresiones

1.

$$\frac{\frac{1}{\frac{1}{16}} + \frac{1}{\frac{1}{20}}}{\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.4}}$$

$$\frac{\frac{1}{\frac{25}{1}} + \frac{1}{\frac{50}{1}}}{\frac{1}{0.04} + \frac{1}{0.02}}$$

2.

$$\left(\frac{0.20 * \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}} \right)^3$$

3.

$$\frac{(2^2)^3 * (3^3)^2}{(3^2)^3 * (2^3)^4}$$

4.

$$\left[\frac{3^3 * \left(\frac{1}{3} \right)^3}{2^3 * \left(\frac{1}{2} \right)^3 * \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right]^2$$

5.

$$\frac{45\frac{10}{63} - 44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9}\right) \div 4 - \frac{3}{4}} \div 31$$

6.

$$1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}}$$

7.

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}$$

Respuestas Ejercicios Propuestos para autoevaluación

1. $\frac{1}{8}$

2. $\frac{64}{125}$

3. $\frac{1}{64}$

4. 81

5. $-\frac{1}{16}$

6. $\frac{151}{124}$

7. $\frac{738}{215}$

4.2 Resolución de problemas**4.2.1 Ejercicios resueltos**

1. La diferencia entre los $\frac{5}{6}$ y los $\frac{2}{9}$ de un número es 22. Determine el número.

Solución:

Se inicia encontrando la diferencia entre los $\frac{5}{6}$ y los $\frac{2}{9}$ del número que se busca.

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{15}{18} - \frac{4}{18} = \frac{15-4}{18} = \frac{11}{18}$$

ahora se sabe que $\frac{11}{18}$ del número equivalen a 22.

Para conocer el valor de $\frac{1}{18}$ del número, se divide 22 entre 11 y se obtiene que es igual a 2.

Ahora bien, si $\frac{1}{18}$ es 2, el número completo es $\frac{18}{18}$, por lo que se multiplica 2 x 18 y se determina que el número buscado es 36.

Respuesta:

El número buscado es 36.

.....

2. Un automovilista recorre un día los $\frac{7}{10}$ de la distancia entre dos ciudades y al día siguiente recorre los $\frac{5}{6}$ de lo que le falta para llegar. El tercer día solo recorre 22 km y llega a su destino. ¿Qué distancia recorrió en total?

Solución:

Para calcular la distancia total recorrida, analizaremos la situación día a día.

El primer día recorrió $\frac{7}{10}$ de la distancia total, quiere decir que lo que le faltaba recorrer era lo siguiente:

$$D_F = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Esto quiere decir que le hacía falta recorrer $\frac{3}{10}$ de la distancia total.

El segundo día retoma la marcha y recorre $\frac{5}{6}$ de lo que le faltaba, es decir, $\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{10}$ de la distancia total, para calcular que fracción del total que recorre realizaremos la siguiente operación:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

Esto quiere decir que el segundo día, el automovilista recorrió $\frac{1}{4}$ de la distancia total.

En el tercer día, recorre 22km y llega a su destino, debemos encontrar a que fracción de la distancia total corresponden esos 22 km.

Encontraremos primero la distancia que recorrió en los días 1 y 2.

$$\frac{7}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7 \times 2 + 1 \times 5}{20} = \frac{14 + 5}{20} = \frac{19}{20}$$

Si ha recorrido $\frac{19}{20}$ de la distancia total en 2 días, le faltaría solo $\frac{1}{20}$ de la distancia para llegar en el tercer día.

Entonces podemos decir que $\frac{1}{20}$ de la distancia total equivale a 22km, por lo que para encontrar la distancia total multiplicaremos los 22km por 20

$$22\text{km} \times 20 = 440\text{km}$$

Respuesta:

La distancia total que recorre es de 440km

.....

3. Tres pintores A, B y C pintan juntos una casa en 3 días. Si A la pintara solo, tardaría 18 días, mientras que B se tardaría 14 días. Determine en cuánto tiempo la pintaría C si trabajara solo.

Solución:

Para determinar cuánto tiempo necesitaría C, primero debemos evaluar cuánto se tardan los tres juntos y cuánto se tardan A y B solos.

A, B y C se tardan juntos 3 días, esto quiere decir que en 1 día hacen $\frac{1}{3}$ del trabajo.

También sabemos que A se tarda 18 días, por lo que en un día realizaría $\frac{1}{18}$ del trabajo.

El pintor B, se tarda 14 días por lo que en un día realizará $\frac{1}{14}$ del trabajo.

Podemos calcular qué fracción del trabajo realizarán A y B juntos en 1 día.

Trabajo A en 1 día + Trabajo de B en 1 día

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{14}$$

Para realizar esta operación, buscamos el mcm de 18 y 14

18	14	2
9	7	3
3	7	3
1	7	7
	1	

$$mcm = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$$

Podemos calcular cuanto se tardan A y B juntos:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{14} = \frac{7+9}{126} = \frac{16}{126} = \frac{8}{63}$$

El trabajo de C cada día es la diferencia entre el trabajo que realizan los 3 juntos diariamente y el trabajo que realizan A y B juntos.

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{63} = \frac{3*7-8}{63} = \frac{21-8}{63} = \frac{13}{63}$$

C realiza cada día $\frac{13}{63}$ del trabajo. Para saber cuántos días necesita para terminar el trabajo dividiremos 63 entre 13.

$$63 \div 13 = 4$$

Con un residuo de 11, por lo que el resultado es 4 días con $\frac{11}{13}$, puede expresarse como $4\frac{11}{13}$

Respuesta:

El pintor C se tardaría $4\frac{11}{13}$ días en terminar de pintar la casa.

.....

4. Un comerciante perdió en el primer año de operaciones $\frac{1}{5}$ de su capital, el segundo ganó una cantidad igual a los $\frac{3}{10}$ de lo que le quedaba; el tercer año gana $\frac{3}{5}$ de lo que tenía al final del segundo año, al terminar tenía Q13,312. Determine cuál fue la inversión inicial.

Solución:

Para determinar la inversión inicial, primero debemos analizar cuánto ganó o perdió cada año de operaciones.

En el primer año el comerciante perdió $\frac{1}{5}$ de su inversión inicial, es decir que le quedan $\frac{4}{5}$.

En el segundo año, inicia con $\frac{4}{5}$ de su inversión y gana el equivalente a $\frac{3}{10}$ de esa cantidad, por lo que en el segundo año gana $\frac{3}{10}$ de $\frac{4}{5}$, es decir,

$$\frac{3}{10} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

Ahora, podemos calcular el capital al finalizar el segundo año, equivalentes a la suma de lo que tenía al principio del año y la ganancia:

$$\frac{4}{5} + \frac{6}{25} = \frac{5*4+6}{25} = \frac{20+6}{25} = \frac{26}{25}$$

Finalmente, en el tercer año inicialmente tiene $\frac{26}{25}$ de la inversión inicial, y gana $\frac{3}{5}$ de esta cantidad:

$$\frac{26}{25} \times \frac{3}{5} = \frac{78}{125}$$

Ahora, representaremos el proceso:

Inicio		Primer año Pierde		Segundo año Gana		Tercer año Gana
1	−	$\frac{1}{5}$	+	$\frac{6}{25}$	+	$\frac{78}{125}$

Podemos encontrar entonces la cantidad que tiene al finalizar el tercer año:

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{6}{25} + \frac{78}{125} = \frac{125 - 1 \times 25 + 6 \times 5 + 78}{125} = \frac{125 - 25 + 30 + 78}{125} = \frac{208}{125}$$

Al finalizar el tercer año el comerciante tiene Q.13, 312.00 esto equivale a $\frac{208}{125}$ de la inversión inicial.

$\frac{1}{125}$ del capital inicial equivale a $13312 \div 208$, esto es igual a 64; la inversión inicial será entonces de $\frac{125}{125}$, que se calcula así:

$$125 \times 64 = 8000$$

Respuesta:

La inversión inicial del comerciante fue de Q8, 000.00

.....

5. El perímetro de un triángulo equilátero mide $\frac{1}{3}$ y el perímetro de un cuadrado mide $\frac{2}{3}$. Expresar la suma de los cuadrados de sus áreas como una fracción.

Solución:

El perímetro del triángulo equilátero es de $\frac{1}{3}$, por lo que la medida de cada lado será un tercio de esa cantidad:

$$L_T = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$$

El perímetro del cuadrado es $\frac{2}{3}$ por lo que cada lado medirá un cuarto de esa cantidad

$$L_C = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

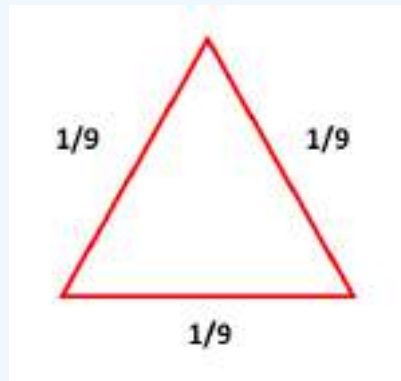
Ahora calcularemos el área de cada uno, empezaremos por el triángulo equilátero, el área de un triángulo está dado por:

$$A_T = \frac{1}{2}b * h$$

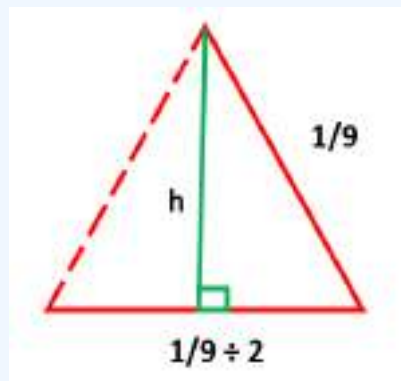
El cuadrado del área será entonces:

$$A_T^2 = \left(\frac{1}{2}b * h \right)^2 = \frac{1}{4}b^2 * h^2$$

Necesitamos conocer las medidas de la base y la altura del triángulo. Realizaremos un esquema de la situación:



La base del triángulo mide $\frac{1}{9}$, si se traza la altura del triángulo desde el vértice superior al lado horizontal (base), dado que es equilátero, dicha altura divide la base a la mitad.



Para encontrar la altura del triángulo, aplicaremos el Teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$h^2 = \left(\frac{1}{9} \right)^2 - \left(\frac{1}{18} \right)^2 = \frac{1}{81} - \frac{1}{324} = \frac{4-1}{324} = \frac{3}{324} = \frac{1}{108}$$

El cuadrado del área será entonces:

$$A_T^2 = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{9} \right)^2 * \left(\frac{1}{108} \right) = \frac{1}{4} * \frac{1}{81} * \frac{1}{108} = \frac{1}{34992}$$

Ahora calcularemos el área del cuadrado:

$$A_C = l^2$$

El cuadrado de esta área es:

$$A_C^2 = (l^2)^2 = l^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$$

La suma del cuadrado de las áreas es:

$$A_T^2 + A_C^2 = \frac{1}{34992} + \frac{1}{1296} = \frac{1+27}{34992} = \frac{28}{344992} = \frac{7}{8748}$$

Respuesta:

La suma de los cuadrados de las áreas es $\frac{7}{8748}$

.....

4.2.2 Ejercicios propuestos

- La diferencia entre los $\frac{3}{4}$ y los $\frac{2}{5}$ de un número es 21. Determinar el número.
R/ El número es 60
- Una empresa divide sus ganancias entre 3 socios, al primer accionista le corresponde $\frac{1}{3}$, al segundo, $\frac{2}{5}$ del resto y al otro le corresponden Q. 20, 000.00. Determine la ganancia total de la empresa.
R/ La ganancia total es de Q.50,000.00
- Tres electricistas realizan el trabajo de cableado en un edificio en 5 días. Si el trabajador A, trabaja solo, terminaría el trabajo en 8 días; mientras que B es el doble de rápido que A. Si A y B trabajaran juntos 2 días y luego llega C y termina el trabajo restante en 3 días. ¿En cuánto tiempo haría el trabajo solo el electricista C? **R/ Al trabajador C le toma 12 días terminar el trabajo**
- Un lote de artículos producidos en una fábrica se ofrecen a la venta. Se recibe un pedido de tres quintas partes del lote y luego se recibe otro pedido de $\frac{7}{8}$ del resto. Al momento del despacho se identifica que los 250 artículos restantes eran defectuosos. Determine la cantidad de artículos que se vendieron.
R/Se vendieron 4,750 artículos.
- El lado de un triángulo equilátero y el lado de un cuadrado miden el mismo valor de $\frac{5}{2}$. Si el lado del triángulo se triplica y el del cuadrado se reduce a la mitad. Determinar una fracción que represente la diferencia entre los cuadrados de las áreas de las figuras.
R/ La fracción que representa la diferencia de los cuadrados de las áreas es $\frac{75625}{128}$



5. Números reales

Hasta el momento, se han desarrollado los fundamentos para conocer los conjuntos numéricos, a partir de los números naturales, los números enteros y los números racionales se han analizado las operaciones definidas en cada uno de estos conjuntos, sus propiedades y aplicaciones. Para completar el estudio de los números reales, hace falta conocer otro conjunto numérico: los números irracionales.

Básicamente, los **números irracionales** son los números que no son racionales, es decir, no se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$, donde **a** y **b** son números enteros y **b** es diferente de cero

Como consecuencia de que no son racionales, no se pueden expresar como un número decimal exacto o periódico. Entonces, ¿Cómo son?

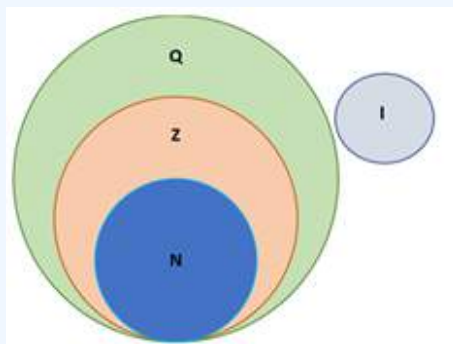
Los números irracionales se pueden representar por **números decimales no periódicos**, entre ellos se encuentran algunos radicales tales como:

$$\sqrt{2} = 1.41423562..., \sqrt{5} = 2.236067978..., \sqrt{99} = 9.949874371...$$

Algunos números irracionales son ampliamente conocidos por sus aplicaciones, entre ellos pueden mencionarse π , el número de Euler e , la razón áurea ϕ :

El conjunto de los números reales se puede expresar como: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Desde el punto de vista teórico, los números reales se pueden construir con diferentes enfoques, los cuales no serán tratados en este documento, en función de sus propósitos.



Aunque no puede identificarse al primero y al último elemento, existe un orden en los números reales que se fundamenta en la propiedad conocida como **tricotomía**, la cual expresa que, para dos números reales **a** y **b**, se cumple de forma exclusiva una de las tres posibilidades:

$$a < b \quad a = b \quad a > b$$

Al asociar cada número real con un punto de una recta, se genera lo que se conoce como **recta real**, que a diferencia de las representaciones geométricas de otros conjuntos de números estudiados, es continua; se puede decir que ya no quedan espacios vacíos para ubicar otros números reales como en las representaciones discretas. De esta forma, los números mayores que un número dado se ubican a la derecha, mientras que los menores se ubican a la izquierda.



Valor absoluto y sus propiedades

El valor absoluto de un número real se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades útiles del valor absoluto de los números reales son:

- El valor absoluto de un número real, siempre es mayor o igual que cero. $|x| \geq 0$
- El valor absoluto de un número es cero, sí y sólo si, el número es cero, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- El valor absoluto del producto de dos números reales es igual que el producto de los valores absolutos.

$$|xy| = |x||y|$$

Por ejemplo:

$$|2(-8)| = |2| \cdot |-8|$$

$$|-16| = 2(8)$$

$$16 = 16$$

- El valor absoluto de la suma de dos números reales, es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los números dados. Se conoce como desigualdad triangular.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Se presentan dos ejemplos en los cuales se muestra un caso en que hay igualdad y otro en que se cumple la desigualdad:

$$|3 + 6| \leq |3| + |6|$$

$$|9| \leq |3| + |6|$$

$$9 \leq 3 + 6$$

$$9 \leq 9$$

También:

$$|-3 + 6| \leq |-3| + |6|$$

$$|3| \leq |-3| + |6|$$

$$3 \leq 3 + 6$$

$$3 \leq 9$$

Este tema es de interés recurrente en los cursos de contenidos relacionados con álgebra y funciones, por lo que su estudio será profundizado en las unidades siguientes.

Valor relativo y sistema posicional de numeración

El sistema de numeración que utilizamos emplea diez dígitos para expresar una cantidad a partir de cifras representadas por: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Un sistema de numeración posicional se basa en el concepto de valor relativo, cuyo significado es que el valor de un dígito depende de la posición que ocupe en la cantidad en que se incluye.

En particular, en el sistema de numeración decimal, cada posición está asociada con una potencia de 10, por lo que en cada posición la mayor cifra que puede colocarse es 9 y al completar 10, pasa al nivel siguiente.

Desde los inicios de la formación matemática escolar, se aprende que: 1 decena tiene diez unidades, 1 centena tiene 10 decenas, 1 unidad de millar, tiene 10 centenas y así sucesivamente. Se aprende también que las cifras incrementan su valor relativo al cambiar de posición de derecha a izquierda, sin embargo, la lectura de las cantidades se inicia desde la izquierda hacia la derecha.

En términos generales, un número $\mathbb{N}$ se puede representar de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = x_n 10^n + x_{n-1} 10^{n-1} + \dots + x_1 10^1 + x_0 10^0 + x_{-1} 10^{-1} + \dots + x_{-m} 10^{-m}$$

donde: $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{-m}$ son las cifras del número, n indica el número de dígitos a la izquierda del punto decimal menos uno, m indica el número de dígitos a la derecha del punto decimal.

La expresión podría parecer complicada, sin embargo, es la representación que se aplica de forma cotidiana. Se presentan algunos ejemplos para ilustrar la definición:

- En el primer caso, el número tiene cinco cifras, por lo tanto, $n = 5 - 1 = 4$. No tiene cifras decimales, entonces $m = 0$

$$\begin{aligned} 34,528 &= 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 3 \times 10,000 + 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 30,000 + 4,000 + 500 + 20 + 8 \end{aligned}$$

- El número dado tiene tres dígitos a la izquierda del punto decimal por lo que $n = 3 - 1 = 2$. También se observa que tiene dos dígitos a la derecha del punto decimal, por lo que se establece que $m = 2$.

$$\begin{aligned} 253.54 &= 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} \\ &= 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1 + 5 \times 0.1 + 4 \times 0.01 \\ &= 200 + 50 + 3 + 0.5 + 0.04 \end{aligned}$$

La representación de números a partir del sistema posicional de base 10, es útil en la representación de situaciones que posteriormente se resolverán mediante el planteo de ecuaciones. Como ejemplos, se presentan algunas de ellas.

- Representar en términos del número de decenas, un número de dos cifras, cuyo dígito de las unidades es el triple que el dígito de las decenas.
Se puede escribir en forma simbólica: u = dígito de las unidades, d = dígito de las decenas

$$N = d \times 10^1 + u \times 10^0$$

El enunciado indica que:

dígito de las unidades = $3 \times$ dígito de las decenas, lo que se puede representar como $u = 3 \times d$

Se sustituye u y se obtiene: $N = d \times 10 + 3 \times d$

- Representar en términos de decenas un número de tres cifras en el que el dígito de las unidades supera en 3 al dígito de las decenas, mientras que el dígito de las centenas es una unidad menor que el de las decenas.

u = dígito de las unidades: 3 más que dígito de las decenas.

d = dígito de las decenas.

c = dígito de las centenas: 1 menos que dígito de las decenas.

Se observa que las unidades y centenas se pueden expresar con base en el dígito de las decenas.

centenas	decenas	unidades
$d - 1$	d	$d + 3$

$$N = (d - 1) \times 10^2 + d \times 10^1 + (d + 3) \times 10^0$$

5.1 Operaciones con números reales

Las propiedades más importantes para caracterizar a los números reales, se relacionan con las operaciones de adición y multiplicación, estas propiedades se han conservado o ampliado, con relación a los conjuntos numéricos contenidos en el conjunto de los números reales.

A manera de síntesis se enuncian las principales propiedades:

- **Cerradura.** Si a y b son números reales, $a + b \in \mathbb{R}$; $a \times b \in \mathbb{R}$.
- **Conmutativa.** Si a y b son números reales, $a + b = b + a$; $a \times b = b \times a$
- **Asociativa.** Si a, b, c son números reales,

$$(a + b) + c = a + (b + c); (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

- **Existencia de elementos neutros.**

Para todos los *números reales*, existe número 0, tal que: $a + 0 = 0 + a = a$

Para todos los *números reales*, existe número 1, tal que: $a \times 1 = 1 \times a = a$

- **Existencia de elementos inversos.**

Para todo número real a , existe elemento $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Para todo número real distinto de cero, existe un elemento $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, tal que $a \times \left(\frac{1}{a}\right) =$

$$\left(\frac{1}{a}\right) \times a = 1$$

- **Distributiva de la multiplicación sobre la adición.**

Si a, b, c son números reales, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$; $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Otras propiedades importantes que facilitarán posteriormente la comprensión de los procesos de resolución de ecuaciones, se sintetizan a continuación:

- Si a, b, c son números reales y se sabe que $a = b$, entonces se cumple que:

$$\begin{array}{ll} a + c = b + c & a - c = b - c \\ a \times c = b \times c \ (c \neq 0) & \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \ (c \neq 0) \end{array}$$

- Si a, b son números reales y $a \times b = 0$, entonces $a = 0$, ó $b = 0$

Potenciación y radicación

Las definiciones y propiedades de las operaciones de potenciación y radicación, dadas en el estudio de los conjuntos numéricos contenidos en $\mathbb{R}$, se conservan. Por su utilidad en procesos de simplificación de expresiones, se presentan ejemplos de operaciones con radicales y el procedimiento conocido como racionalización, el cual consiste en eliminar radicales, usualmente del denominador.

Ejemplos.

- Simplificar:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \sqrt[3]{128} + \frac{2}{5} \sqrt[3]{250} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{135} \\ & \frac{3}{4} \sqrt[3]{64 \times 2} + \frac{2}{5} \sqrt[3]{125 \times 2} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{27 \times 5} \\ & \frac{3}{4} (\sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{2}) + \frac{2}{5} (\sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2}) + \frac{1}{3} (\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{5}) \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} \left((4) \times \sqrt[3]{2} \right) + \frac{2}{5} (5 \times \sqrt[3]{2}) + \frac{1}{3} (3 \times \sqrt[3]{5})$$

$$3 \times \sqrt[3]{2} + 2 \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} = 5 \times \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}$$

- Racionalizar la expresión $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Para eliminar el radical del denominador se multiplica por el elemento neutro de la multiplicación (1), expresado de la forma $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

- Otro proceso que se utiliza con mucha frecuencia, es multiplicar por el conjugado de una expresión para eliminar algún radical. El conjugado de $a + b$, es $a - b$.

Se multiplica por el conjugado del denominador para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{5}{2 - \sqrt{7}}$

$$\frac{5}{2 - \sqrt{7}} = \frac{5}{2 - \sqrt{7}} \times \frac{2 + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} = \frac{5(2 + \sqrt{7})}{(2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})}$$

Para dejar claro el proceso se realiza el producto indicado en el denominador por aparte:

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7}) &= 2(2 + \sqrt{7}) - \sqrt{7}(2 + \sqrt{7}) \\ &= 4 + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 7 = 4 - 7 = -3 \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{5}{2 - \sqrt{7}} = \frac{5(2 + \sqrt{7})}{-3} = -\frac{5}{3}(2 + \sqrt{7})$$

Notación de desigualdades

La notación utilizada para representar desigualdades incluye los siguientes signos:

$$\begin{array}{ll} > \text{ mayor que} & \geq \text{ mayor o igual que} \\ < \text{ menor que} & \leq \text{ menor o igual que} \end{array}$$

Esta simbología permite describir subconjuntos de los números reales, que se denominan intervalos numéricos, en los que se indican los extremos del intervalo como el menor y el mayor de los elementos, respectivamente. Así, es posible definir los siguientes intervalos.

Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

Ejemplo: $[-3, 8] = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 8\}$

Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

Ejemplo: $(2, 3) = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 3\}$

Intervalos semiabiertos: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(0, 10] &= \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 10\} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \\ [7, 12) &= \{x \in \mathbb{R}, 7 \leq x < 12\}\end{aligned}$$

Intervalos infinitos

$$\begin{aligned}(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\} & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}, x < a\} & (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}\end{aligned}$$

5.1.1 Ejercicios resueltos

1. Racionalizar el denominador de la expresión

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Solución:

Para racionalizar la expresión se multiplica por una fracción cuyo numerador y denominador es el conjugado del denominador.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$$

Cuando se multiplica la suma por la diferencia de dos cantidades, se obtiene una diferencia de cuadrados, lo cual se verifica a continuación:

$$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 7 - 5 = 2$$

Desarrollando la multiplicación:

$$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) = \sqrt{7}\sqrt{7} - \sqrt{5}\sqrt{7} + \sqrt{5}\sqrt{7} - \sqrt{5}\sqrt{5} = 7^{1/2} \times 7^{1/2} - 5^{1/2} \times 5^{1/2} = 7^1 - 5^1 = 2$$

Se reescribe la expresión como:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7} + \sqrt{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2 \times 7} + \sqrt{2 \times 5}) = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{10}}{2}$$

Respuesta:

La racionalización es igual a $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{10}}{2}$

2. Simplificar la expresión

$$5\sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 5\sqrt{98} + \sqrt{\frac{1}{27}}$$

Solución:

Para simplificar se aplican propiedades de los exponentes fraccionarios y la estrategia es expresar las cantidades subradicales como el producto de factores donde al menos uno de ellos tenga una raíz cuadrada entera.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 5\sqrt{98} + \sqrt{\frac{1}{27}} \\ 5\sqrt{64 \times 2} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{49 \times 2} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9 \times 3}} \\ 5\sqrt{64}\sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - 5\sqrt{49}\sqrt{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Se observa que los números $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, al sumarlos dan cero, por lo que solo quedan los siguientes términos.

$$5\sqrt{64}\sqrt{2} - 5\sqrt{49}\sqrt{2}$$

Al reducir la expresión obtenemos lo siguiente:

$$5\sqrt{64}\sqrt{2} - 5\sqrt{49}\sqrt{2} = 5 \times 8\sqrt{2} - 5 \times 7\sqrt{2} = 40\sqrt{2} - 35\sqrt{2} = \sqrt{2}(40 - 35) = 5\sqrt{2}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es $5\sqrt{2}$.

.....

3. Simplifique la siguiente expresión

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{135} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{32}} + \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 20\sqrt[3]{\frac{1}{200}}$$

Solución:

El proceso es similar al caso de la raíz cuadrada pero se busca descomponer o completar cantidades subradicales con raíces cúbicas enteras.

Procedemos a simplificar los radicales por separado y luego se simplifica la expresión global.

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{135} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{27 \times 5} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{5} = \frac{2}{3}(3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$$

Ahora reducimos la segunda expresión:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{64}} = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{8}$$

Procedemos a reducir la tercera expresión:

$$\frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4} \times \frac{4^2}{4^2}} = \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{4^3}} = \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{4^3}} = \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{8 \times 2}{4^3}} = \frac{7}{16} * \sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{2} = \frac{7(2)}{16} * \sqrt[3]{2} = \frac{7}{8} * \sqrt[3]{2}$$

Solo falta reducir la última expresión:

$$-20\sqrt[3]{\frac{1}{200}} = -20\sqrt[3]{\frac{1}{8 \times 25}} = -20\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = -\frac{20}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{25}} = -10\sqrt[3]{\frac{1}{25} \times \frac{5}{5}} = -10\sqrt[3]{\frac{5}{125}} = -\frac{10\sqrt[3]{5}}{5} = -2\sqrt[3]{5}$$

Sustituyendo los resultados en la expresión original obtenemos:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{135} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{32}} + \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 20\sqrt[3]{\frac{1}{200}} = 2\sqrt[3]{5} + \frac{\sqrt[3]{2}}{8} + \frac{7}{8}\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{5} = \frac{8}{8}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es $\sqrt[3]{2}$

.....

4. Racionalizar el denominador de la expresión

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

Solución:

Para aplicar la estrategia de multiplicar por el conjugado del denominador, se agrupan los tres números en dos grupos:

$$\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}$$

Así el conjugado es:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}$$

Se reescribe la expresión dada:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{[(\sqrt{6} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]}{[(\sqrt{6} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}]} \times \frac{[(\sqrt{6} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]}{[(\sqrt{6} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}]}$$

Al efectuar la multiplicación en el numerador se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}] \times [\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}] &= \sqrt{6}\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{6}\sqrt{2} \\ &\quad + \sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{2} \\ &\quad + \sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2} \\ &= 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2 \\ &= 11 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} \\ &= 11 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ahora se efectúa el producto en el denominador.

$$\begin{aligned}
 [\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}] \times [\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}] &= (\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \\
 &= \sqrt{6}\sqrt{6} + 2\sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2} \\
 &= 6 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 - 2 \\
 &= 7 + 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Reescribimos la expresión con los resultados de las dos multiplicaciones:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{11 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{7 + 6\sqrt{2}}$$

Hace falta multiplicar por el conjugado el denominador:

$$\frac{11 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{7 + 6\sqrt{2}} \times \frac{7 - 6\sqrt{2}}{7 - 6\sqrt{2}}$$

Efectuamos el producto del numerador

$$\begin{aligned}
 (11 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sqrt{2})(7 - 6\sqrt{2}) &= 77 + 42\sqrt{2} + 28\sqrt{3} + 14\sqrt{3}\sqrt{2} - 66\sqrt{2} - 36 \cdot 2 - 24\sqrt{3}\sqrt{2} - 24\sqrt{3} \\
 &= (77 - 72) + (42\sqrt{2} - 66\sqrt{2}) + (28\sqrt{3} - 24\sqrt{3}) + (14\sqrt{2}\sqrt{3} - 24\sqrt{2}\sqrt{3}) \\
 &= 5 - 24\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

El numerador es entonces: $5 - 24\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}\sqrt{2}$

Efectuamos el producto del denominador:

$$\begin{aligned}
 (7 + 6\sqrt{2})(7 - 6\sqrt{2}) &= 49 + 42\sqrt{2} - 42\sqrt{2} - 36\sqrt{2}\sqrt{2} \\
 &= 49 - 36 \cdot 2 \\
 &= 49 - 72 \\
 &= -23
 \end{aligned}$$

Finalmente, al racionalizar el denominador de la expresión, se obtiene que:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5 - 24\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}\sqrt{2}}{-23}$$

Para dejar el denominador positivo se cambia el signo también al numerador, por lo que la simplificación final es:

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{-5 + 24\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\sqrt{2}}{23}$$

Respuesta:

La simplificación es igual a $\frac{-5 + 24\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3}\sqrt{2}}{23}$

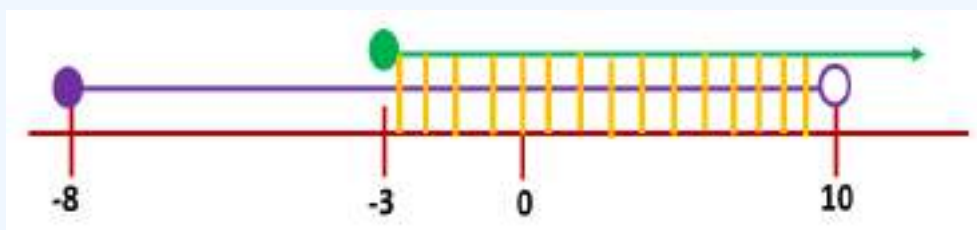
5. Hallar un intervalo de números reales que cumple con:

$$x \geq -3$$

$$-8 \leq x < 10$$

Solución:

Los números $x \geq -3$ se representan en el intervalo $[-3, \infty)$, mientras que los números que cumplen con $-8 \leq x < 10$, forman el intervalo $[-8, 10)$, se muestran en la recta estos intervalos.



Gráficamente, se observa que los intervalos se intersectan en $[-3, 10)$ y estos son los números satisfacen la desigualdad $-8 \leq x < 10$

Respuesta:

El intervalo de números reales que cumple con las condiciones dadas es: $[-3, 10)$.

.....

5.1.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. Racionalizar el denominador de la expresión

$$\frac{12}{\sqrt{6}-2} - \frac{36}{\sqrt{6}}; \mathbf{R/12}$$

2. Racionalizar el denominador

$$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} - 5\sqrt{\frac{1}{15}} + 3\sqrt{\frac{1}{12}}; \mathbf{R/\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

3. Racionalizar el denominador

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{24} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{54} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{375} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{128}; \mathbf{R/4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}}$$

4. Racionalizar el denominador de la expresión

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \mathbf{R/\frac{3 + \sqrt{3}\sqrt{5} - \sqrt{3}\sqrt{2}}{6}}$$

5. Hallar el intervalo de números reales que cumplen con:

$$x \leq +10 \text{ y } x > -3; \mathbf{R/(-3, 10]}$$

5.2 Resolución de problemas

5.2.1 Ejercicios resueltos

1. Un hombre compra una regla, un lapicero, un borrador y un sacapuntas en una librería. Este último le ha costado Q3.75, el lapicero le ha costado el doble de lo que le costo el sacapuntas; el borrador Q1.78 más que el lapicero y la regla cinco veces lo del sacapuntas. ¿Cuánto le ha costado todo?

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es escribir las condiciones como expresiones matemáticas.

$$\text{Sacapuntas} = 3.75$$

$$\text{Lapicero} = 2(\text{Sacapuntas}) = 2(3.75) = 7.5$$

$$\text{Borrador} = \text{Lapicero} + 1.78 = 7.5 + 1.78 = 9.28$$

$$\text{Regla} = 5(\text{Sacapuntas}) = 5(3.75) = 18.75$$

Ahora que sabemos el costo de cada artículo podemos calcular el costo total.

$$\text{Costo} = 3.75 + 7.5 + 9.28 + 18.75$$

$$\text{Costo} = 39.28$$

Respuesta:

El costo total de los cuatro artículos fue de Q.39.28

.....

2. Un camión conduce cinco fardos de mercancías. El primero pesa 72.675 kg; el segundo 8 kg menos que el primero; el tercero, 6.104 kg más que los dos anteriores juntos y el cuarto tanto como los tres anteriores. ¿Cuál es el peso del quinto fardo, si el peso total de las mercancías es 960.34 kg?

Solución:

El primer paso para resolver el problema es definir las expresiones matemáticas correspondientes a los pesos de los fardos. Tenemos información sobre el peso de 4 de los 5 fardos y del peso total de los 5. Las expresiones serán entonces:

$$F_1 = 72.675$$

$$F_2 = F_1 - 8 = 72.675 - 8 = 64.675$$

$$F_3 = (F_1 + F_2) + 6.104 = (72.675 + 64.675) + 6.104 = 143.454$$

$$F_4 = F_1 + F_2 + F_3 = 72.675 + 64.675 + 143.454 = 280.804$$

Ahora que calculamos el peso de 4 de los 5 fardos podemos determinar el peso del último fardo utilizando el peso total y el de los otros.

$$F_5 = \text{Total} - (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

$$F_5 = 960.34 - (72.675 + 64.675 + 143.454 + 280.804) = 960.34 - 561.608 = 368.732$$

Respuesta:

El peso del quinto fardo es de 368.732kg

.....

3. Un rodillo de piedra tiene una circunferencia de 6.34 pies. De un extremo a otro de un terreno da 24.75 vueltas. ¿Cuál es la longitud del terreno?

Solución:

El primer paso será hacer un esquema de la situación.



El rodillo rueda a lo largo de todo el terreno, dado que tiene una circunferencia de 6.34 pies, cada vez que de una vuelta recorrerá esa distancia.

Utilizando el número total de vueltas podemos calcular la longitud del terreno.

$$L = C \times \text{No. de vueltas}$$

$$L = 6.34 \times 24.75 = 156.915$$

Respuesta:

El terreno tiene una longitud de 156.915 pies.

.....

4. Un número se multiplica por 4, este producto se divide entre 6; al cociente obtenido se le añade 18 y a esta suma se le resta 6. Si el resultado es 12.002, ¿cuál es el número?

Solución:

Se busca un número que cumpla con ciertas condiciones, para determinarlo se plantea la siguiente operación:

$$\left[\frac{N \times 4}{6} + 18 \right] - 6 = 12.002$$

Para encontrar el número realizaremos las operaciones en el orden inverso:

$$\left[\frac{N*4}{6} + 18 \right] = 12.002 + 6 = 18.002$$

$$\frac{N*4}{6} = 18.002 - 18 = 0.002$$

$$N*4 = 0.002*6 = 0.012$$

$$N = \frac{0.012}{4} = 0.003$$

Respuesta:

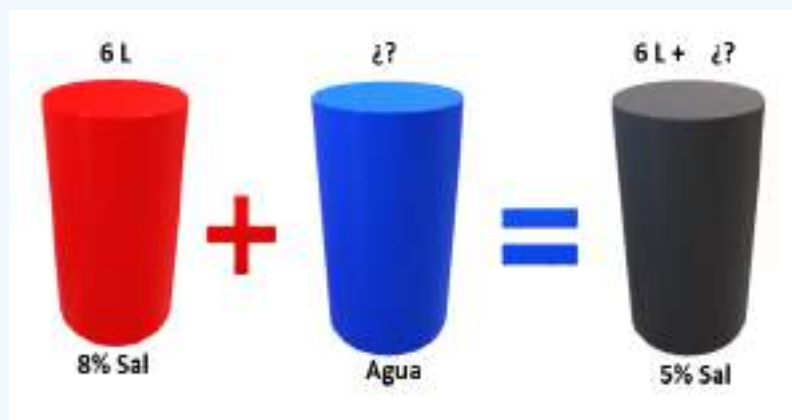
El número que cumple con las condiciones es 0.003

.....

5. Seis litros de una solución de sal al 8% y agua pura, se mezclan con agua para reducir la concentración de sal al 5% ¿Cuántos litros de agua se agregaron a la mezcla inicial?

Solución:

El primer paso para resolver el problema será realizar un esquema de la situación.



Se analiza que la cantidad de sal al inicio y al final es la misma, la concentración de sal cambia porque se aumenta el volumen de agua.

Al inicio teníamos un volumen de 6 litros, la cantidad de sal sería:

$$S_I = \frac{8}{100} * 6 = \frac{48}{100} = 0.48$$

Al final la concentración de sal se reduce al 5%, por lo que el volumen de sal sería de $\frac{5}{100}$ del volumen final.

Podemos decir entonces que el volumen de 0.48 L de sal equivale a $\frac{5}{100}$ del volumen final.

$$\frac{1}{100} = 0.48 \div 5 = 0.096$$

Por lo que $\frac{100}{100}$ del volumen final será:

$$\frac{100}{100} = 100 \times \frac{1}{100} = 100 \times 0.096 = 9.6L$$

Dado que al inicio se tenía un volumen de 6 litros, el volumen de agua agregado será:

$$V_A = V_F - V_I = 9.6 - 6 = 3.6L$$

Respuesta:

El volumen de agua agregado para reducir la concentración de sal fue de 3.6 litros.

.....

5.2.2 Ejercicios propuestos para la autoevaluación

1. ¿Cuántos galones de agua deben agregarse a 2 galones de una solución de sal al 10% y agua, para producir una solución al 4%?

R/ Deben agregarse 3 galones de agua.

2. Los radios de dos círculos concéntricos difieren en una unidad. Si el radio del mayor mide $\sqrt{8}cm$, calcular el área de la región limitada entre ellos.

R/ El área limitada entre los dos círculos equivale a $(2\sqrt{8} + 1)\pi$.

3. La base de un rectángulo mide 6 pies más que la altura y el perímetro es de 91 pies. Calcular el área del rectángulo.

R/ El área del rectángulo es de 579.06 pies

4. La suma de la base y la altura de un triángulo es 62 centímetros. Encuentre el área del triángulo si la altura mide 22 cm menos que el doble de la base.

R/ El área del triángulo es de $476cm^2$.

5. Si dos esferas metálicas de radios 3cm y 5 cm se funden para formar una sola esfera, determine el radio de la esfera resultante, sabiendo que el volumen de una esfera se calcula

por medio de la expresión $V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$.

R/ El radio de la esfera resultante es de 5.34cm

6. Números complejos

Este conjunto numérico amplía la posibilidad de resolver algunas situaciones que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Una forma sencilla de ejemplificar esta limitación, es comparar los resultados del proceso de encontrar las raíces de ecuaciones como las siguientes:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

En la primera, aunque el proceso de solución no se ha estudiado, es fácil determinar que $(1)^2 = 1$ y que $(-1)^2 = 1$, por lo que se escribe.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

La segunda ecuación es muy parecida, sin embargo, procediendo de la misma forma que en el caso anterior se obtiene lo siguiente:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

De acuerdo con las propiedades estudiadas para los números reales, no es posible obtener una raíz de índice par, en este caso cuadrada, de un número negativo; esto se debe a que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Por ello se indica que la ecuación no puede resolverse en el conjunto de números reales

Unidad imaginaria

De lo anterior, surge la necesidad de analizar otro tipo de números, llamados **imaginarios**. Se define la unidad imaginaria como:

$$i = \sqrt{-1}$$

Así, puede resolverse una ecuación como $x^2 + 1 = 0$ pues $x^2 = -1$ y la solución se puede escribir como: $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

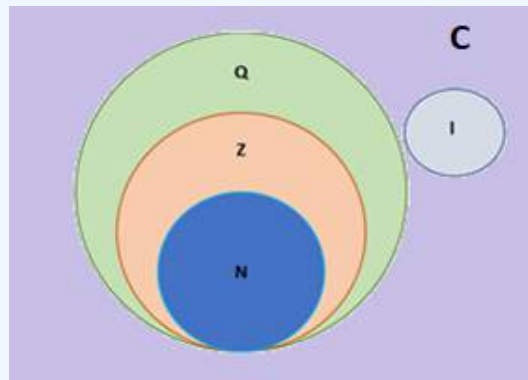
Notación para los números complejos

Al conjunto de números complejos se le denota por $\mathbb{C}$, y un número complejo es de la forma: $z = a + bi$, donde a y b son números reales.

El conjugado de un número complejo, se denota por: $\bar{z} = a - bi$

El conjunto de los números reales está contenido en el conjunto de los números complejos, lo cual se denota por $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, es decir, un número real también es un complejo si se considera que el coeficiente de la parte imaginaria, b , es cero

Es claro que los números complejos no pueden representarse en el mismo plano que los números reales, por lo que, en su estudio más profundo, se analizará la forma en que se representan geoméricamente.



6.1 Operaciones con números complejos

Dados dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se definen las operaciones básicas de la siguiente forma:

- **Adición y sustracción.** El resultado es un número complejo que contiene la suma o diferencia de la parte real y de la parte imaginaria.

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

- **Multiplicación.** Se multiplica como dos binomios de números reales tomando en cuenta que:

$$i \times i = i^2 = -1$$

$$z_1 \times z_2 = (a + bi)(c + di) = (a \times c - b \times d) + (a \times d + b \times c)i$$

Si se multiplica un número complejo por su conjugado, el resultado es un número real:

$$z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a \times a - abi + abi - b \times b \times i^2 = a^2 + b^2$$

- **División.** Se utiliza la estrategia de multiplicar por una fracción cuyo numerador y denominador es el conjugado del número complejo que aparece en el denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a \times c + b \times d) + (b \times d - a \times c)i}{c^2 + d^2} = \frac{a \times c + b \times d}{c^2 + d^2} + \frac{b \times d - a \times c}{c^2 + d^2}i$$

6.1.1 Ejercicios resueltos

1. Realizar las operaciones indicadas y expresar el resultado de la forma $a + bi$

$$\frac{(1+2i) + (3-i)}{2+i}$$

Solución

Se realiza primero la suma indicada en el numerador

$$\frac{(1+2i) + (3-i)}{2+i} = \frac{(1+3) + (2i-i)}{2+i} = \frac{4+i}{2+i}$$

Para efectuar la división se multiplica por una fracción equivalente a la unidad, con el conjugado de $2+i$

$$\frac{4+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{(4+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{8+2i-4i-i^2}{4+2i-2i-i^2}$$

Se simplifican las expresiones, recordando que $i^2 = -1$:

$$\frac{4+i}{2+i} = \frac{(8-(-1)) + (2i-4i)}{4-(-1)} = \frac{(8+1) + (2i-4i)}{4+1} = \frac{9-2i}{5}$$

Respuesta:

El resultado de la operación es $\frac{9}{5} - \frac{2}{5}i$

.....

2. Realice las operaciones indicadas y simplifique

$$(2-3i)^{-1} \times (3+4i)$$

Solución

Es necesario transformar el exponente negativo:

$$(2-3i)^{-1} = \frac{1}{(2-3i)}$$

Así la expresión se reescribe como:

$$\frac{1}{(2-3i)} \times (3+4i) = \frac{3+4i}{2-3i}$$

Para efectuar la división se multiplica por el conjugado del denominador toda la expresión.

$$\frac{3+4i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+8i+9i+12i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{6+17i-12}{4+9} = \frac{-6+17i}{13} = -\frac{6}{13} + \frac{17}{13}i$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es $-\frac{6}{13} + \frac{17}{13}i$

.....

3. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

$$\frac{2 + \sqrt{-8}}{1 - \sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{2}\sqrt{-2}}$$

Solución:

Primero escribiremos las raíces cuadradas de números negativos como números imaginarios:

$$\sqrt{-8} = \sqrt{4 \times 2 \times (-1)} = 2\sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \times (-1)} = 6i$$

Se reescribe la expresión:

$$\frac{2 + \sqrt{-8}}{1 - \sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{2}\sqrt{-2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} + \frac{6i}{\sqrt{2}\sqrt{2}i} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} + \frac{6}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} + 3$$

Primero se efectúan las divisiones y luego se suman los resultados.

$$\frac{2 + 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \times \frac{1 + \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}\sqrt{2}i^2}{1 - \sqrt{2}i + \sqrt{2}i - \sqrt{2}\sqrt{2}i^2} = \frac{2 + 4\sqrt{2}i + 4(-1)}{1 - 2(-1)} = \frac{-2 + 4\sqrt{2}i}{1 + 2} = \frac{-2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i$$

Volviendo a la expresión inicial

$$\frac{2 + \sqrt{-8}}{1 - \sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-36}}{\sqrt{2}\sqrt{-2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} + 3 = \frac{-2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i + 3 = \frac{9 - 2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i = \frac{7}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i$$

Respuesta:

La simplificación de la expresión es $\frac{7}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}i$

.....

4. Encontrar el resultado de:

$$(2 - 2i)^2 + 2(2 + i)$$

Solución:

Primero encontraremos el resultado de elevar al cuadrado y multiplicar un número real por un

número complejo, luego se efectúa la adición:

$$\begin{aligned}
 (2-2i)^2 &= (2-2i)(2-2i) \\
 &= 4-4i-4i+4i^2 \\
 &= 4-8i+4(-1) \\
 &= 4-8i-4 \\
 &= -8i
 \end{aligned}$$

(6.1.1)

$$2(2+i) = 4+2i$$

La simplificación de la expresión será entonces:

$$(2-2i)^2 + 2(2+i) = -8i+4+2i = 4-6i$$

Respuesta:

El resultado de la operación es $4-6i$

.....

5. Verifique que:

$$[(3+2i)^2 - 6(3+2i) + 13 = 0]$$

Solución:

Se inicia elevando al cuadrado el número complejo y efectuando el producto indicado:

$$\begin{aligned}
 (3+2i)(3+2i) - 6(3+2i) + 13 &= 0 \\
 (9+6i+6i+4i^2) - (18+12i) + 13 &= 0 \\
 (9+12i-4) - (18+12i) + 13 &= 0 \\
 (5+12i) - (18+12i) + 13 &= 0 \\
 5+12i-18-12i+13 &= 0 \\
 5-18+13 &= 0 \\
 -13+13 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

.....

6.1.2 Ejercicios propuestos para autoevaluación

1. Realizar la operación indicada y expresar el resultado de la forma $a+bi$

$$\frac{(7-4i)-(4+3i)}{2-i}$$

$$\mathbf{R/\frac{13}{5}-\frac{11}{5}i}$$

2. Realizar la operación indicada y expresar el resultado de la forma $a + bi$

$$(1+i)^{-1} - (1-i)^{-1} \qquad \mathbf{R/-i}$$

3. Realizar las operaciones indicadas y simplificar

$$(\sqrt{2} - \sqrt{-2})(8 + \sqrt{2}) \qquad \mathbf{R/12(4\sqrt{2} + 1) + 2(1 - 4\sqrt{2})i}$$

4. Encontrar el resultado de:

$$(1 - 3i)^2 - 2(1 + 3i) \qquad \mathbf{R/-10 - 12i}$$

5. Verificar que:

$$3(2 - i)^2 - 12(2 - i) = -15$$

Bibliografía

- N. Antonyan, L. Herrera y P. Wisniewski. Problemario de Precálculo. Editorial International Thomson Editores, 2001.
- A. Baldor. Álgebra. Editorial Cultural Centroamericana, 1974.
- M. Castillo, R. Ponciano y E. Bracamonte. Aprendamos a aprender matemática. Universidad de San Carlos de Guatemala. 2008.
- D. Cohen. Precalculus: A problems - oriented approach. Sexta Edición, Editorial Thomson. 2005.
- D. Cohen, T. B. Lee, D. Sklar. Precalculus with Unit-Circle Trigonometry. Cuarta Edición, Editorial Thomson. 2006.
- J. Hernández Ávalos. ¿Cómo estás en Matemática? Ejercicios complementarios de Matemática, para la profundización en la enseñanza preuniversitaria. Editorial Pueblo y Educación. 2006.
- R. Huettenmuller. Precalculus DeMystified. Editorial McGraw Hill. 2005.
- A. Kostrikin. Introducción al álgebra. Editorial Mir, 1983.
- L. Leithold. Matemáticas previas al Cálculo. Editorial Oxford University Press. 1998.
- D. Lippman, M. Rasmussen. Precalculus: An Investigation of Functions. Edición digital de Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 United States License. Disponible en <http://www.opentextbookstore.com/precalc/>. 2011.

- F. Safier. Precalculus. Schaum's Outlines. Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, 2009.
- M. Sullivan. Precálculo. Editorial Pearson Educación, 1997.
- E. Swokowski. Introducción al cálculo con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1987.
- E. Swokowski. Álgebra con geometría analítica. Editorial Iberoamericana, 1997.
- E. Swokowski, J. A. Cole. Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry. Editorial Cengage Learning, 2010.
- D. Zill, J. M. Dewar. Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera Edición, Editorial McGraw Hill, 2012.